

Приложение к журналу

КВАНТ

№6/2000

ЧИСЛА И МНОГОЧЛЕНЫ

Бюро



Квантум

П Р И Л О Ж Е Н И Е
к журналу **КВАНТ** №6/2000

ЧИСЛА И МНОГОЧЛЕНЫ

Составитель А.А.Егоров



Москва 2000
Бюро «Квантум»

УДК 512(082)
ББК 22.141
Ч67

Приложение
к журналу «Квант»
№6/2000

Ч67 Числа и многочлены/Составитель А.А.Егоров — М.:
Бюро Квантум, 2000. — 128 с. (Прил. к журналу «Квант»
№6/2000)
ISBN 5-85843-026-0

Книга представляет собой сборник статей, опубликованных в журнале «Квант» в различные годы. Темы статей — основная теорема алгебры, комплексные и трансцендентные числа, кватернионы, кубические уравнения и многочлены, и многое другое. Хотя эти разделы математики не входят в школьную программу, для чтения книги достаточно знания математики в объеме 8—9 классов средней школы.

Для учащихся и преподавателей средних школ, лицеев и гимназий, участников и руководителей математических кружков, а также для всех любителей математики

ББК 22.141

ISBN 5-85843-027-9

© Бюро Квантум
«Квант», 2000

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	4
О пользе чисел «поистине софистических». <i>С.Гиндикин</i>	5
Комплексные числа. <i>Л.Понтрягин</i>	18
Числа и многочлены. <i>С.Ашманов</i>	25
Иррациональность и неприводимость. <i>В.Олейников</i>	35
Неприводимость и иррациональность. <i>В.Олейников</i>	45
Основная теорема алгебры. <i>Л.Понтрягин</i>	54
Дама с Собачкой. <i>А.Тоом</i>	66
Кватернионы. <i>А.Мищенко, Ю.Соловьев</i>	77
Формула существует, но... <i>И.Клумова, Д.Фукс</i>	87
Кубическая парабола. <i>Л.Понтрягин</i>	96
График кубического четырехчлена. <i>О.Жаутыков</i>	106
Графическое решение кубических уравнений. <i>А.Краснодемская</i>	110
О границах корней кубического уравнения. <i>О.Жаутыков</i>	113
Многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля. <i>С.Табачников</i>	117
Трансцендентные числа. <i>М.Хапланов</i>	121

ПРЕДИСЛОВИЕ

В этой книжке представлены статьи из журнала «Квант», затрагивающие почти школьную тематику.

К великому сожалению, основные факты теории многочленов и комплексных чисел оказались за рамками программ общеобразовательной школы. Мы надеемся, что данный сборник в какой-то мере восполнит имеющийся пробел.

Вы познакомитесь, в частности, с основной теоремой алгебры, с комплексными числами и кватернионами, узнаете об алгебраических и трансцендентных числах, кубических уравнениях, многочленах, наименее уклоняющихся от нуля, и о многом другом.

Пусть вас не смущают повторы (мы не стали исключать из статей некоторые определения и теоремы, имеющиеся в других статьях). Дело в том, что каждая статья — это отдельное, замкнутое в себе произведение, часто отражающее личность, оригинальные интересы и вкусы автора. А авторы, как правило, — крупные математики и известные педагоги,

Для чтения книги не нужны никаких познаний, выходящих за рамки школьного курса 8—9 классов. Тем самым она доступна широкому кругу читателей — любителей математики.

О ПОЛЬЗЕ ЧИСЕЛ «ПОИСТИНЕ СОФИСТИЧЕСКИХ»

С.Гиндикин

Многовековая история развития представлений человека о числах — одна из самых ярких сторон развития человеческой культуры. В стремлении расширить мир чисел трудноразгадываемым образом переплелись разнообразные мотивы.

Дробь появилась очень рано — уже у египтян и вавилонян — по-видимому, в связи с переходом к более мелким долям измерения. Их связь с делением натуральных чисел понималась более смутно и вторично.

Греки осознавали числа через процесс геометрического измерения: именно так они уяснили себе существование иррациональных чисел (несоизмеримость диагонали квадрата и его стороны) и построили теорию «величин» (как мы сказали бы сегодня, теорию положительных действительных чисел) — одну из вершин греческой геометрии. Характерный штрих: «числами» назывались лишь натуральные числа, а их расширения — «величинами». Вычислительный аспект отодвигался на второй план и обычно не считался достойным внимания ученого. Платон, энергично заботившийся о том, чтобы практические задачи не оскверняли подлинного духа геометрии, смеялся над вычислителями, «которые разменивают единицу на мелкую монету» (занимаются делением).

Отрицательные числа появились в V—VI веках в индийской и арабской математике, где на первый план выдвинулась вычислительная сторона дела. И хотя довольно рано было осознана возможность интерпретировать отрицательные числа, скажем, как долг в задачах коммерческого содержания, практика показывала, что ими удобно пользоваться чаще, чем такая интерпретация возможна. Сильно упрощая, можно сказать, что вычислители рассматривали отрицательные числа как «воображаемые», ненастоящие числа, которыми удобно пользоваться в промежу-

точных вычислениях как результатом вычитания, когда оно невыполнимо в области положительных чисел. При этом важно было убедиться, что не нарушаются «правила гигиены»: можно доверять окончательному положительному ответу. Ни о каком равноправии отрицательных чисел с положительными речь не шла: в окончательном ответе, кроме простейших ситуаций, отрицательные числа не появлялись. Об отношении к ним выразительно говорят разные варианты их названий: «ложные», «фиктивные», «абсурдные», «невозможные», «мнимые».

Впрочем, последний термин позднее пришлось «уступить» другому классу чисел, который удивительным образом появился в европейской математике одновременно с первым серьезным рассмотрением отрицательных чисел. Этот историко-математический парадокс связан с Джероламо Кардано (1501—1576), яркой и противоречивой личностью с повышенной склонностью к фантазиям и мистике, что нередко далеко заводило его в ложном направлении. Однако более практичный и осторожный человек вряд ли решился бы в то время на построения, которым математика обязана Кардано.

Главные результаты Кардано относятся к исследованию формулы для решения кубического уравнения, которую впервые получил дель Ферро (1465—1526) и которую Кардано узнал от Тартальи (1500?—1577) (подробнее об этом см. в моей книге «Рассказы о физиках и математиках», — М.: «Наука», 1981).

Напомним, что общее кубическое уравнение $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ заменой $x = y - \frac{a}{3}$ приводится к виду

$$x^3 + px + q = 0. \quad (1)$$

Будем искать решение уравнения (1) в виде $x = y_1 + y_2$. Тогда $x^3 = y_1^3 + y_2^3 + 3xy_1y_2$. Сопоставляя с (1), мы видим, что если y_1 и y_2 удовлетворяют равенствам $3y_1y_2 = -p$, $y_1^3 + y_2^3 = -q$, то $x = y_1 + y_2$ является решением уравнения (1). Такие y_1, y_2 легко найти: если $t_1 = y_1^3$, $t_2 = y_2^3$, то по теореме Виета t_1 и t_2 являются

корнями квадратного уравнения $t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0$, т.е. $t_{1,2} = -\frac{q}{2} \pm \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$, откуда

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}; \quad (2)$$

формулу (2) называют сейчас *формулой Кардано*.

Вспомним теперь, что Кардано вел свои рассмотрения в рамках положительных чисел. (Кроме того, он не владел алгебраической символикой, что невероятно осложняло дело, особенно при попытках формулировать общие правила. Однако этот тип трудностей мы не будем здесь имитировать.) Поэтому Кардано изучает отдельно уравнения

$$x^3 + ax = b, \quad (3)$$

$$x^3 = zx + b, \quad (4)$$

$$x^3 + b = ax, \quad (5)$$

где a, b положительны. Четвертый формально возможный тип $x^3 + ax + b = 0$ он не рассматривает, так как такое уравнение, очевидно, не имеет (положительных!) корней.

Дель Ферро придумал правило для решения (3). Тарталья переоткрыл это правило и придумал правило для решения (4); он сформулировал оба правила в виде стихотворения, которое и было сообщено Кардано.

Говоря прозой, речь идет о том, что решение ищется в виде $x = \sqrt[3]{u} \mp \sqrt[3]{v}$ (минус для (3), плюс для (4)), где, соответственно $u \mp v = b, uv = \left(\frac{a}{3}\right)^3$ (ср. с (2)).

Уравнение (3) всегда имеет единственный действительный корень, причем этот корень всегда положителен (сегодня в этом легко убедиться по графику) и благополучно находится по указанному правилу.

В (4) также всегда имеется единственный положительный корень x , причем всегда $x > \sqrt{a}$ (почему?). Если $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{b^2}{4} - \frac{a^3}{27} \geq 0$ (это равносильно тому, что $x \leq \frac{4a}{3}$), то корень находится по формуле (2). В этом случае других действительных корней нет. Если же $\Delta < 0$, то в (2) под квадратным радикалом стоит отрицательное число и формула отказывает. На самом деле в этом случае (он был назван *неприводимым*) кроме одного положительного имеется два отрицательных корня (быть может, кратных). Тарталья несомненно знал на примерах, что и при $\Delta < 0$ положительный корень уравнения (4) может существовать, а Кардано недвусмысленно утверждал существование корня в общем случае. Неприводимый случай уравнения (4) доставил много волнений и Тарталье и Кардано, но способ находить корень так и не был найден!

Что касается уравнения (5), то оно легко сводится к (4): корни (5) отличаются от корней (4) знаком, и, стало быть, при $\Delta = \frac{b^2}{4} - \frac{a^3}{27} > 0$ у (5) нет положительных корней, а при $\Delta < 0$ (в неприводимом случае) имеются два положительных корня (и один отрицательный). Но такой тип рассуждений был за пределами возможностей математиков XVI века. Тарталья пишет, что решение (5) сводится к решению (4), но не делает никаких намеков на способ сведения.

Кардано придумал способ перейти от (5) к (4), довольно близкий к подстановке $x = -y$. Мы ищем положительный корень x уравнения (5). Пусть y — положительный корень уравнения (4); он всегда существует, причем $y \geq \sqrt{a}$ и, в неприводимом случае, $y < \sqrt{\frac{4a}{3}}$. Складывая (4) и (5), получаем $x^3 + y^3 = a(x + y)$, откуда $x^2 - xy + y^2 = a$ ($x + y \neq 0$ в положительной области), $x_{1,2} = \frac{y}{2} \pm a - \frac{3y^2}{4}$. В результате при $y < \sqrt{\frac{4a}{3}}$, т.е. в неприводимом случае ($\Delta < 0$), мы выражаем через положительный корень y уравнения (4) два положительных корня уравнения (5) (их положительность следует из неравенства $y > \sqrt{a}$). Кардано замечает, что $y = x_1 + x_2$, т.е. в неприводимом случае положительный корень уравнения (4) равен сумме положительных корней уравнения (5).

Таким образом, изучая уравнение (5), Кардано сумел остаться в рамках положительных корней. Но именно в результате этих рассмотрений он понял ту роль, которую играют отрицательные корни. Он понял, что у уравнения (5) всегда имеется «ложный» (отрицательный) корень $-y$, что при $\Delta < 0$ сумма всех его корней, включая «ложный», равна нулю, что для справедливости этого утверждения при $\Delta = 0$ надо считать, что уравнение (5) имеет кратный положительный корень, что уравнение (4) в неприводимом случае имеет два «ложных» корня и что сумма всех его корней в этом случае тоже равна нулю.

Утверждение о сумме корней уравнения, имеющего три корня (считая «ложные»), Кардано обобщил на общие кубические уравнения: сумма корней знаком отличается от коэффициента при x^2 . (Надо сказать, что известная теорема Виета, относящаяся к корням квадратного уравнения, была получена позднее.) Кардано первым работал с отрицательными корнями, причем он не просто обратил внимание на возможность их рассмотрения —

он показал, сколь гармонично они входят в теорию алгебраических уравнений. С этих результатов Кардано началась алгебра в современном смысле слова.

Результаты Кардано были собраны в его книге «Великое искусство, или О правилах алгебры», вышедшей в 1545 г. Глава XXXVII этой книги носит название «О правиле рассмотрения ложного неизвестного». И если первое правило в этой главе относится к отрицательным корням, то второе правило гласит: «Второй вид ложного решения уравнения заключается в корне из отрицательного количества. Я приведу пример. Если кто-нибудь потребует, чтобы разделить 10 на две части, которые по перемножении дали бы 30 или 40, то ясно, что этот случай или вопрос невозможен. Но мы поступим так: разделим 10 пополам, половина будет 5; умноженная на самое себя, она даст 25. Затем вычти из 25 то, что должно получиться по перемножении, скажем 40, как я объяснял тебе это в главе о действиях в 4-й книге; тогда останется $m:15$; если взять от этого R и прибавить к 5 и вычесть из 5, то получаются части, которые, перемноженные между собой, дадут 40. Таким образом, части эти будут $5p:Rm:15$ и $5m:Rm:15$ ». Текст этот нетрудно расшифровать. Речь идет об уравнении $x(10 - x) = 40$, т.е. $x^2 - 10x + 40 = 0$. Утверждается, что его корнями будут $5 \pm \sqrt{25 - 40} = 5 \pm \sqrt{-15}$. Читатель без труда восстановит обозначения, которыми пользуется Кардано.

Так впервые появились в математике комплексные числа, которые Кардано называл «поистине софистическими». Новыми числами Кардано совершенно не пользовался и, похоже, относился к ним не без подозрения.

Во всем этом есть один интригующий момент. Нередко высказывают предположение (например, Н.Бурбаки), что Кардано придумал комплексные числа, пытаясь разобраться с неприводимым случаем кубического уравнения. Дело в том, что если в формуле (2) при $\Delta < 0$ не побояться извлечь квадратный корень из отрицательного числа, то в последующих операциях мнимые части уничтожаются и в результате получается правильный ответ, являющийся действительным числом¹. Таким образом, обращение к комплексным числам не только позволяет оправдать формулу Кардано в общем случае, но они неминуемо возникают в задаче определения действительных корней кубического уравнения с действительными коэффициентами. Было

¹ См. статью И.Клумовой и Д.Фукса «Формула существует, но...» в настоящем сборнике.

бы очень логично, если бы Кардано ввел комплексные числа по этой причине. Но никаких свидетельств того, что при работе с комплексными числами Кардано выходил за пределы квадратных уравнений, нет. В реальных исторических фактах часто не удастся обнаружить «естественных» связей!

Связь комплексных чисел с неприводимыми кубическими уравнениями была обнаружена, если и не Кардано, то очень скоро. Это было сделано непосредственным преемником Кардано, инженером из Болоньи Рафаэлем Бомбелли (около 1530—1572), автором знаменитой «Алгебры», вышедшей в 1572 г. Среди многих замечательных результатов в «Алгебре» имеется систематическое изучение комплексных (и отрицательных) чисел. У Бомбелли можно найти соотношения

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1}, \quad \sqrt[3]{52 + \sqrt{-2209}} = 4 + \sqrt{-1}.$$

Интересно, что Бомбелли вводит специальное наименование для i («*riu de meno*»; 1 он называет «*riu*»). Бомбелли уверенно применяет комплексные числа к неприводимому кубическому уравнению.

В формуле Кардано фигурируют выражения вида $\sqrt[3]{\alpha \pm \sqrt{\beta}}$, где β может быть любого знака; эти выражения и исследует Бомбелли. Пусть $\sqrt[3]{\alpha \pm \sqrt{\beta}} = u \pm \sqrt{v}$ (значит, из (2) $x = 2u$). Тогда $u^3 + 3uv = \alpha$, $u^2 - v = \sqrt[3]{\alpha^2 - \beta}$ и, если положить $\gamma = \sqrt[3]{\alpha^2 - \beta}$, для u , независимо от знака β , возникает уравнение $4u^3 = 3\gamma u + \alpha$. В частности, в формуле Кардано для уравнения (4) имеем $\alpha = \frac{b}{2}$, $\beta = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3$, $\gamma = \frac{a}{3}$. Теперь, с одной стороны, понятно, как действительный корень выражается через кубические корни из комплексных чисел ($x = 2u$), но, с другой стороны, выражения для x через действительные радикалы все равно не получается, поскольку возникает кубическое уравнение $4u^3 = au + \frac{b}{2}$, фактически совпадающее (подстановка $x = 2u$) с исходным уравнением (4).

Позднее Лейбниц (1646—1716), который изучал кубические уравнения по книге Бомбелли, окончательно осознал, что в неприводимом случае невозможно выразить корни уравнения через радикалы, оставаясь в действительной области.

На рубеже XVI—XVII веков судьба новых чисел еще не решилась. Франсуа Виет (1540—1603), которого часто называли «отцом алгебры» за то, что он начал пользоваться алгебраичес-

кой символикой (буквенными обозначениями для коэффициентов уравнения, а не только для неизвестных), старался обходиться не только без комплексных корней, но и без отрицательных. Поскольку он занимался, в частности, соотношениями между корнями и коэффициентами (теорема Виета), это было ему не просто, но он находил выход из положения. Скажем, если уравнение (5) имеет два положительных корня x_1, x_2 и один отрицательный корень x_3 , то Виет, вместо равенств $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -a$, $x_1x_2x_3 = -b$ (сейчас эти равенства называются *формулами Виета*), показывал, что $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 = a$, $x_1x_2(x_1 + x_2) = b$ (докажите!), не привлекая, в отличие от Кардано, ни третьего отрицательного корня, ни положительного корня вспомогательного уравнения (4). Есть мнение (Н. Бурбаки), что относительный консерватизм Виета связан с тем, что он был страстным почитателем древних.

Мы должны вспомнить Виета еще в связи с его интерпретацией неприводимого кубического уравнения. Виет был великим мастером получать алгебраические соотношения тригонометрическими средствами. Занимаясь тригонометрическими функциями кратных углов, Виет решил воспользоваться формулой

$$\cos 3\varphi = 4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \quad (6)$$

для решения кубических уравнений. Он сопоставил (6) с уравнением (4). Чтобы это сопоставление было более прозрачным, сделаем в (4) замену $a = 3r^2$, $b = \alpha r^2$. В этих обозначениях неприводимому случаю отвечает $r > \frac{\alpha}{2}$, что делает естественной

замену $\alpha = 2r \cos v \left(0 < v < \frac{\pi}{2} \right)$. Если еще сделать замену неизвестного $x = 2ry$, то (4) превратится в уравнение

$$4y^3 - 3y = \cos v, \quad (7)$$

которому, в силу (6), удовлетворяет $y = \cos \frac{v}{3}$, т.е. для (4) получаем выражение для положительного корня $x_1 = 2r \cos \frac{v}{3}$.

Ясно, что два отрицательных корня равны $x_{2,3} = 2r \cos \left(\pm \frac{2\pi}{3} + \frac{v}{3} \right)$

и что для уравнения (5) корректны аналогичные выкладки, только $\frac{\pi}{2} < v < \pi$ и x_1 — отрицательный корень, а x_2, x_3 — положительные (сопоставьте эти представления для корней со

способом Кардано переходить от корней уравнения (4) к корням уравнения (5)).

Откажемся на время от имитации старины и перепишем формулу Виета в обозначениях (1), (2). Если $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$ (неприводимый случай), то, в частности, $p < 0$. Полагая $r = \sqrt{-\frac{p}{3}}$, $\alpha = \frac{3q}{p}$ (тогда $2r > \alpha$), $v = \arccos \frac{\alpha}{2r}$, окончательно получаем

$$x = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \left(\frac{2\pi k}{3} + \frac{\arccos \frac{3q\sqrt{3}}{2p\sqrt{-p}}}{3} \right).$$

Все выкладки Виет производит в области действительных чисел, однако в его представлении корней участвуют не только алгебраические операции, но и тригонометрические функции. Его формула не противоречит тому, что не существует алгебраического представления корней неприводимого кубического уравнения. Формула Виета несомненно пригодна в вычислительном плане: она позволяет вычислять корни при помощи тригонометрических таблиц.

В идейном отношении она допускает следующую интерпретацию. Среди геометрических задач древних, приводивших к кубическим уравнениям, можно выделить две задачи: задачу о построении куба заданного объема (в частности, задачу об удвоении куба), сводящуюся к извлечению кубического корня, и задачу о трисекции угла, сводящуюся к уравнению (7). Формула Кардано показывает, что в приводимом случае решение кубического уравнения (при помощи арифметических операций и извлечения квадратного корня) сводится к задаче о построении куба (кстати, Кардано выводил свою формулу на геометрическом языке!). Результат Виета показывает, что в неприводимом случае в аналогичном смысле все сводится к уравнению трисекции угла. Итак, две классические геометрические задачи отражают две возможные *не сводящиеся друг к другу* (в области действительных чисел) ситуации в кубических уравнениях.

В XVII веке к отрицательным числам пришло окончательное признание. Единообразная трактовка трех возможных типов квадратных уравнений (в положительной области!) восходит

еще к Михаилу Штифелю (1487 — 1567), к его «Общей арифметике», вышедшей в Нюрнберге в 1544 г. (за год до «Великого искусства» Кардано).

В 1585 г. в «Арифметике» Симона Стевина (1548 — 1620), замечательного механика и математика, общие квадратные уравнения рассматриваются уже достаточно последовательно. Стевин решительно пользуется разными типами чисел: рациональными, иррациональными, отрицательными. Он возрождает геометрический взгляд греческих математиков на числа (это сделал уже Бомбелли в оставшейся неизвестной современникам IV книге «Алгебры»), начинает работать с (конечными) десятичными дробями, приближая ими любые действительные числа. Принципиально, что Стевин настаивает на полном равноправии новых чисел со старыми, на их реальности: «Мы приходим к выводу, что не существует никаких абсурдных, иррациональных, неправильных, необъяснимых или глухих чисел, но что среди чисел существует такое совершенство и согласие, что нам надо размышлять дни и ночи над их удивительной законченностью».

Все же окончательное признание отрицательных чисел связано с их интерпретацией при помощи числовой оси в аналитической геометрии и направленного движения в механике. Но и это признание далось нелегко. Тому есть интересное свидетельство. В середине XVIII века Д'Аламбер (1717 — 1783) пишет в статье «Отрицательное» в «Энциклопедии»: «Правила алгебраических действий с отрицательными количествами в общем приняты всеми и считаются точными независимо от того, что подразумевается под этими количествами». Итак, нет сомнений в корректности их использования, но еще не ясен окончательно вопрос об их реальности.

Теперь о комплексных числах. Даже такой смелый человек, как Стевин, считал, что заниматься ими — дело бесполезное, отвлекающее от занятий «законными» вопросами. И все же, хоть и медленно, дело двигалось вперед. Начинают говорить об «идеальных», реально не существующих корнях уравнений высокой степени, которые удобно рассматривать, чтобы сохранить соотношения между корнями и коэффициентами в общем случае. Причем пока совсем не ясно, что «идеальные» корни сводятся к комплексным: почему хватит этих чисел, придуманных для обслуживания квадратных уравнений?

Альбер Жирар (1590 — 1633) в изданной в 1629 г. книге «Новое открытие в алгебре» утверждал, что уравнение n -й степени имеет n корней, считая «идеальные» (это утверждение

мельком упоминалось у Петера Роте еще в 1608 г.³). «Можно было бы спросить: кому нужны такие решения, которые невозможны? – писал Жирар. – Я отвечаю: они нужны для трех вещей – для справедливости общего правила, и чтобы убедиться, что нет других решений, и ради своей полезности». Справедливость требует не согласиться с Жираром: в то время «полезность» комплексных чисел еще никак не проявилась.

Теорема о корнях уравнения n -й степени появляется и на «алгебраических» страницах знаменитой «Геометрии» Рене Декарта (1596 – 1650), вышедшей в 1637 г. в Лейдене (там же, где книга Жирара). В этой книге заложены основы аналитической геометрии, но очень поучителен также текст, относящийся к общим алгебраическим уравнениям. Декарт не пользуется буквенными обозначениями для коэффициентов (как это делал Виет) и вынужден пояснять утверждения на примерах; Декарт вводит обозначение x для неизвестного и от него идут современные обозначения для степеней x^3 , x^4 (впрочем, вместо x^2 все еще пишется xx). «Итак, знайте, – пишет Декарт, – что в каждом уравнении может иметься столько различных корней, т.е. значений неизвестной величины, сколько последняя имеет измерений». Показатель степени здесь называется «измерением», потому что по-прежнему на первый план выдвигается геометрическая интерпретация степени (квадрат, куб). Далее: «Но иногда случается, что некоторые из этих корней ложны, или меньше, чем ничего». Как и следовало ожидать от создателя аналитической геометрии, Декарт уверенно обращается с отрицательными числами. Он четко формулирует утверждение, называемое теперь *теоремой Безу* (который жил заметно позже – в XVIII веке), как для положительных, так и для отрицательных корней, что позволяет понижать степень уравнения, если известен корень. После этого Декарт пишет: «Впрочем, как истинные, так и ложные корни не всегда действительны, но иногда они только мнимые («*imaginaires*»; отсюда и пошел термин «мнимые» – С.Г.), т.е. всегда можно вообразить себе столько корней, сколько я сказал, но иногда не существует никакой величины, которая соответствовала бы корням, которые воображают себе. Так, например, в уравнении $x^3 - 6xx + 13x - 10 \infty 0$ (Декарт пользовался знаком ∞ вместо уже существовавшего $=$) можно

³ Позднее было выяснено, что оно легко следует из так называемой «основной теоремы алгебры», утверждающей, что каждый многочлен с комплексными коэффициентами имеет по крайней мере один комплексный корень.

вообразить себе три корня, но среди них только один действительный, именно 2; что же касается двух других, то их можно увеличивать, уменьшать или умножать так, как я только что объяснил, но при всем том они останутся только мнимыми».

Обратим внимание на два обстоятельства: Декарт не пытается делить левую часть уравнения на $x - \alpha$ для комплексного корня α и, соответственно, не готов рассматривать уравнения с комплексными коэффициентами (комплексные числа играют служебную роль). Декарта можно понять так, что комплексные числа бывают положительными и отрицательными, т.е. он не понимает еще, что комплексные числа нельзя естественно упорядочить! Это заблуждение великого ученого показывает, сколь смутными были еще представления о комплексных числах. Мы привели длинные извлечения из Декарта, чтобы продемонстрировать в наиболее совершенном варианте представления об алгебраических уравнениях и комплексных числах, которые сложились к середине XVII века.

А затем почти полтора века силы лучших математиков были сконцентрированы на создании математического анализа. Алгеброй, которая тогда фактически сводилась к теории алгебраических уравнений, занимались мало, и алгебраические результаты по сравнению с аналитическими достижениями выглядели скромными. Можно сказать, что выдающиеся математики в основном обращались к алгебре в связи с нуждами анализа и аналитической геометрии. Скажем, разложение многочленов на множители понадобилось для интегрирования рациональных дробей. А к комплексным числам начали понемногу привыкать. В связи с нуждами анализа рассматривали даже логарифмы комплексных чисел.

В 1746 г. Д'Аламбер публикует доказательство основной теоремы алгебры с некоторыми пробелами, но с «истинным стержнем» (Гаусс). С работ Лагранжа (1736—1813) началась новая эпоха в теории алгебраических уравнений. Показательно, что и Лагранж, и Эйлер (1707—1783) уделяют заметное внимание исследованию формулы Кардано в комплексной области. Эйлер рассматривает элементарные функции комплексного переменного и обнаруживает поразительную связь показательной и тригонометрических функций. Это был принципиальный шаг, поскольку прежде комплексные числа связывались лишь с алгебраическими уравнениями.

Еще в начале XVIII века был обнаружен важный пример, когда комплексные корни не просто могут быть введены для полноты картины, но связаны с конкретной действительной

задачей. Котес и Муавр обнаружили связь уравнения $x^n - 1 = 0$ с классической задачей о делении круга на n равных частей. Эта связь очевидна, если знать геометрическую интерпретацию комплексных чисел (n комплексных корней из 1 являются вершинами правильного n -угольника).

Гаусс (1777—1855), возможно, уже знал эту интерпретацию, когда в 1796 г. использовал связь с уравнением $x^{17} - 1 = 0$ для построения правильного 17-угольника. Однако в своей публикации, как, впрочем, и в диссертации 1798 г., посвященной первому строгому доказательству основной теоремы алгебры (у нее есть чисто действительная формулировка: любой многочлен с действительными коэффициентами раскладывается в произведение таких же многочленов не выше второй степени), он предпочитает комплексными числами не пользоваться. В 1811 г. в письме к Бесселю Гаусс пишет: «Подобно тому, как всю область действительных величин можно представить с помощью бесконечной прямой, можно себе представить область всех величин, действительных и мнимых, с помощью бесконечной плоскости, где каждая точка, определенная своей абсциссой a и своей ординатой b , представляет в то же время величину $a + ib$ ». Этот результат Гаусс опубликовал только в 1831 г. Аналогичные результаты менее известных современников Гаусса остались почти незамеченными: Ж.Аргон (1806 г.), К.Вессель (1798 г., работа оставалась неизвестной сто лет). В сознании математиков геометрическая интерпретация комплексных чисел превращала воображаемый объект в реальный (кстати, термин «комплексное число» предложил Гаусс).

Историю математики в XIX веке уже нельзя отделить от комплексных чисел. Гаусс, Коши, Якоби, Абель, Риман показывают, что переход к анализу функций комплексной переменной позволяет обнаружить глубочайшие факты, которые нельзя увидеть в действительной области.

В геометрии «воображаемые» элементы появились на сто лет позже, чем в алгебре. Жерар Дезарг (1593—1662) обнаружил, что если ввести «воображаемые» бесконечно удаленные точки, в которых «пересекаются» параллельные прямые, то параллельность в самом деле превращается в частный случай пересечения. Здесь картина во многом напоминает ситуацию с комплексными числами, которые позволили избежать рассмотрения исключительных случаев. Виктор Понселе (1788—1867) почти через двести лет (было это в Саратове, в плену после войны 1812 г.) показал, что все окружности «проходят» через две комплексные бесконечно удаленные точки. Это был момент, когда комплекс-

ные числа появились в геометрии. Многие считали, что они противоречат подлинной геометрической интуиции (известный геометр Якоб Штейнер (1796 — 1863) называл их «призраками», «царством теней»). И все же выбора не было — слишком многие (действительные) геометрические факты стали понятны с комплексной точки зрения.

Три века понадобилось комплексным числам, чтобы занять бесспорное положение в математике. Быть может, это и не так много в сравнении с десятью веками, которые понадобились отрицательным числам. Впрочем, в школьной математике положение комплексных чисел (в отличие от отрицательных) остается непрочным по сей день.

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Л.Понтрягин

Здесь я прежде всего очень кратко рассказываю о том, как возникли в математике и постепенно утвердились в ней комплексные числа. Затем даю определение комплексных чисел, действий над ними и их геометрическую интерпретацию. Попутно доказываются формулы косинуса и синуса суммы, тесно связанные с умножением комплексных чисел.

Историческая справка

Из курса математики известно, что отрицательные числа введены прежде всего для того, чтобы операция вычитания, обратная к операции сложения, была всегда возможна. По аналогичной причине в математике появились комплексные числа. Если рассматривать только действительные числа, то операция извлечения квадратного корня, обратная к операции возведения в квадрат, не всегда возможна, так как нельзя извлечь квадратный корень из отрицательного числа. Этого, однако, недостаточно, чтобы заводить в математике новые числа. Оказалось, что если производить вычисления по обычным правилам над выражениями, в которых встречается корень квадратный из отрицательного числа, то можно прийти к результату, уже не содержащему корень квадратный из отрицательного числа. В XVI веке Кардано нашел формулу для решения кубического уравнения. Оказалось, что именно в том случае, когда кубическое уравнение имеет три действительных корня, в формуле Кардано встречается корень квадратный из отрицательного числа. Обнаружилось таким образом, что, производя вычисления с выражениями, содержащими корень квадратный из отрицательного числа, можно получить вполне понятные результаты. Поэтому эти корни стали употреблять в математике. Назвали их мнимыми числами — тем самым они как бы приобрели право на нелегальное существование. Полные гражданские права мнимым

Опубликовано в «Кванте» №2 за 1983 г.

числам на грани XVIII—XIX столетий дал Гаусс, который назвал их комплексными числами, дал им геометрическую интерпретацию и, что самое главное, доказал основную теорему алгебры, утверждающую, что каждый многочлен имеет хотя бы один действительный или комплексный корень.

Определение комплексных чисел

Мы будем исходить из того, что действительные числа нам известны. Мы знаем, что для них определены два основных действия — сложение и умножение — и имеются обратные к ним действия — вычитание и деление. Для этих действий выполняются хорошо известные правила, которые обычно употребляются совершенно автоматически — поэтому я их не буду здесь формулировать. Множество объектов, для которых определены действия сложения и умножения и обратные к ним действия вычитания и деления, причем выполнены обычные правила, имеющие место для действительных чисел, называется в современной абстрактной алгебре *полем*.

Таким образом, с точки зрения современной абстрактной алгебры множество \mathbf{R} всех действительных чисел представляет собой поле. Поставим теперь перед собой задачу расширить понятие числа или, как говорят в абстрактной алгебре, расширить поле \mathbf{R} до поля \mathbf{K} таким образом, чтобы в этом новом поле \mathbf{K} уравнение

$$z^2 + 1 = 0 \quad (1)$$

имело решение. Элемент поля \mathbf{K} , который удовлетворяет уравнению (1), мы обозначим через i . Таким образом, для i имеем

$$i^2 = -1. \quad (2)$$

Так как поле \mathbf{K} содержит все действительные числа и элемент i и так как в нем возможны действия сложения и умножения, в поле \mathbf{K} должны содержаться всевозможные многочлены относительно i с действительными коэффициентами, в частности — все многочлены первой степени, т.е. выражения вида

$$z = x + yi = x + iy,$$

где x и y — действительные числа. Эти выражения и называются *комплексными числами*. Действия над ними мы определим как действия над многочленами, учитывая при этом условие (2). Комплексные числа вида

$$z = x + 0i = x$$

являются действительными числами. Комплексные числа вида

$$z = 0 + yi = yi$$

называются *чисто мнимыми числами*.

Пусть $z_1 = x_1 + y_1i$, $z_2 = x_2 + y_2i$ — два комплексных числа. Согласно высказанному правилу, сумма и произведение этих комплексных чисел определяются равенствами

$$z_1 + z_2 = (x_1 + y_1i) + (x_2 + y_2i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i; \quad (3)$$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + y_1i)(x_2 + y_2i) = x_1 x_2 + (x_1 y_2 + y_1 x_2)i + y_1 y_2 i^2 = \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2)i. \end{aligned} \quad (4)$$

При получении последнего равенства мы использовали условие (2).

В случае, если число $z_1 = x_1$ — действительное, получаем

$$x_1 z_2 = x_1 x_2 + x_1 y_2 i. \quad (5)$$

Из формул (3) и (4) видно, что сумма и произведение двух комплексных чисел есть также комплексное число.

Для того чтобы убедиться, что действие вычитания, обратное действию сложения, существует, достаточно найти число $-z$, противоположное числу z , а для того чтобы убедиться в том, что возможно деление, достаточно для $z \neq 0$ указать число z^{-1} , обратное числу $z = x + yi$. Числа эти, как легко видеть, задаются формулами

$$-z = -x - yi,$$

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} i.$$

Таким образом, величина z^{-1} , обратная к z , существует всегда, когда $z \neq 0$.

Геометрическое изображение комплексных чисел

Обозначим через P плоскость нашего чертежа и выберем на ней прямоугольную систему координат (рис.1). Комплексное число $z = x + yi$ мы поместим в точку $z = (x; y)$ с координатами x, y . Обозначим также через z вектор, идущий из начала координат O в точку z . Таким образом, буква z обозначает у нас одновременно комплексное число, точку z , изображающую это комплексное число, и вектор z , соответствующий этому комплексному числу. При этом изображении действительные числа

попадают на ось абсцисс — поэтому ось абсцисс называется *действительной осью* плоскости P комплексного переменного, а чисто мнимые числа попадают на ось ординат — поэтому ось ординат называется *мнимой осью* плоскости P комплексного переменного. Нуль попадает в начало координат.

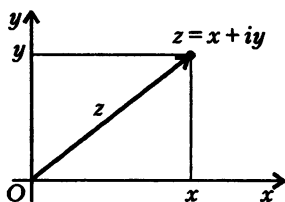


Рис. 1

Длина вектора z называется *модулем* комплексного числа $z = x + yi$ и обозначается $|z|$:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Комплексные числа z , удовлетворяющие условию $|z| = 1$, составляют окружность радиуса 1 с центром в начале координат. На этой окружности лежит число 1. Из точки 1 отложим по окружности дугу заданной длины φ в направлении против часовой стрелки. Конец этой дуги обозначим через (φ) . Если φ — отрицательное число, то для получения (φ) нужно отложить от точки 1 длину дуги $|\varphi|$ по часовой стрелке. Как известно, абсцисса точки (φ) называется $\cos \varphi$, а ее ордината $\sin \varphi$. Таким образом, комплексное число (φ) задается формулой

$$(\varphi) = \cos \varphi + i \sin \varphi. \quad (6)$$

Итак, всякое комплексное число z , по модулю равное 1, записывается в виде (6). Если z — произвольное комплексное число, модуль которого $|z| = \rho$ отличен от 0, то число z/ρ является комплексным числом, по модулю равным 1, и потому записывается в виде (6). Из равенства

$$\frac{z}{\rho} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

мы получаем

$$z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (7)$$

Запись (7) называется *тригонометрической формой* комплексного числа. Число φ называется *аргументом* комплексного числа. Если модуль ρ комплексного числа z отличен от нуля, то аргумент φ определен с точностью до слагаемого $2\pi k$, где k — целое число. Если же модуль ρ комплексного числа равен 0, то формула (7) также имеет место, однако в этом случае аргумент комплексного числа вовсе не определен.

Числа ρ и φ называются *полярными координатами* точки z .

Дадим теперь геометрическое истолкование действий над комплексными числами.

Из формул (3) и (5) следует, что комплексные числа складываются и умножаются на действительные числа, как векторы.

Геометрический смысл сложения комплексных чисел очевиден: вектор $z_1 + z_2$ — это диагональ параллелограмма, построенного на векторах z_1 и z_2 . Отсюда вытекает важное неравенство:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \quad (8)$$

Для того чтобы дать геометрическое истолкование умножению комплексных чисел, нужно употребить операцию поворота вектора или, что то же самое, комплексного числа. Повернув вектор z против часовой стрелки на угол α , мы получим некоторый новый вектор, который обозначим через $R_\alpha(z)$. Геометрически ясно, что операция поворота R_α имеет следующее свойство: если a — действительное число, то

$$R_\alpha(az) = aR_\alpha(z),$$

$$R_\alpha(z_1 + z_2) = R_\alpha(z_1) + R_\alpha(z_2).$$

Из этих двух формул следует, что если a_1 и a_2 — два действительных числа, то имеет место соотношение

$$R_\alpha(a_1 z_1 + a_2 z_2) = a_1 R_\alpha(z_1) + a_2 R_\alpha(z_2). \quad (9)$$

Непосредственно ясно также, что

$$R_\alpha(1) = \cos \alpha + i \sin \alpha. \quad (10)$$

Докажем теперь, что поворот комплексного числа $z = x + yi$ на угол α равносильен умножению его на комплексное число $\cos \alpha + i \sin \alpha$, т.е. что

$$R_\alpha(z) = (\cos \alpha + i \sin \alpha)z. \quad (11)$$

Для этого рассмотрим сначала отдельно поворот на угол $d = \frac{\pi}{2}$. В этом случае $\cos d + i \sin d = i$, и равенство (11) принимает вид $R_d(z) = iz$. С одной стороны, геометрически очевидно, что $R_d(1) = i$, $R_d(i) = -1$. С другой стороны, $i \cdot 1 = i$, $i \cdot i = -1$. Таким образом,

$$R_d(1) = i \cdot 1, \quad R_d(i) = i \cdot i.$$

Из формулы (9) непосредственно вытекает

$$\begin{aligned} iz &= i \cdot (x + iy) = x \cdot i + y(-1) = xR_d(1) + yR_d(i) = \\ &= R_d(x \cdot 1 + y \cdot i) = R_d(x + iy) = R_d(z). \end{aligned}$$

Таким образом, формула (11) доказана для $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Пусть теперь α — произвольное действительное число. При $\hat{z} = \cos \alpha + i \sin \alpha$ получаем

$$\begin{aligned} \hat{z} \cdot i &= i\hat{z} = R_d(\hat{z}) = R_d(\cos \alpha + i \sin \alpha) = \\ &= \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = R_\alpha\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right) = R_\alpha(i). \quad (12) \end{aligned}$$

Таким образом, формула (11) доказана при $z = i$.

Перейдем теперь к доказательству формулы (11) для произвольного комплексного числа

$$z = x + iy.$$

В силу формул (9), (10), (12) имеем

$$\begin{aligned} R_\alpha(z) &= R_\alpha(x + iy) = xR_\alpha(1) + yR_\alpha(i) = \\ &= x(\cos \alpha + i \sin \alpha) + y(\cos \alpha + i \sin \alpha)i = \\ &= (\cos \alpha + i \sin \alpha)(x + iy) = (\cos \alpha + i \sin \alpha)z. \end{aligned}$$

Таким образом, формула (11) полностью доказана.

Применяя формулу (11) к комплексному числу $z = \cos \beta + i \sin \beta$, получаем

$$\begin{aligned} (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) &= R_\alpha(\cos \beta + i \sin \beta) = \\ &= R_\alpha(R_\beta(1)) = R_{\alpha+\beta}(1) = \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) = \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta).$$

Производя перемножение комплексных чисел, стоящих в левой части, по формуле (4), мы получим

$$\begin{aligned} (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) &= \\ &= (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)i. \end{aligned}$$

Значит, мы получили формулы для косинуса и синуса суммы:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

Для произвольных комплексных чисел, которые мы запишем в виде $r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, $s(\cos \beta + i \sin \beta)$, получаем

$$r(\cos \alpha + i \sin \alpha) \cdot s(\cos \beta + i \sin \beta) = rs(\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)). \quad (13)$$

Таким образом, при перемножении двух комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

Формулу (13) очевидным образом можно распространить на произвольное число сомножителей. Если все эти сомножители равны между собой и равны комплексному числу $r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, то мы получаем

$$[r(\cos \alpha + i \sin \alpha)]^n = r^n (\cos n\alpha + i \sin n\alpha).$$

Эта формула очень интересна. Она дает возможность извлечь корень n -й степени из произвольного комплексного числа

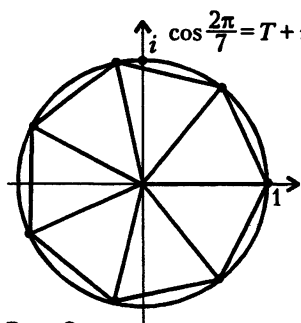


Рис. 2

$\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Именно, оказывается, что число корней n -й степени из числа $\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi) \neq 0$ равно n , причем корни эти расположены на окружности радиуса $\sqrt[n]{\rho}$ с центром в начале координат и составляют вершины правильного n -угольника. Это утверждение я предоставляю для доказательства читателям.

В частности, корень n -й степени из единицы имеет n значений, которые являются вершинами правильного n -угольника, вписанного в единичный круг, причем одна из его вершин есть единица (рис. 2). В виде формулы эти корни записываются следующим образом:

$$\sqrt[n]{1} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

ЧИСЛА И МНОГОЧЛЕНЫ

С.Ашманов

Когда чисел не хватает

Числа бывают разные: положительные и отрицательные, рациональные и иррациональные, алгебраические и трансцендентные. История появления каждого нового класса чисел весьма поучительна и даже драматична.

Такой привычный для нас объект, как отрицательные числа, являлся предметом дискуссий в течение столетий. О них знали в древности в Индии, Китае и Вавилоне, однако споры о природе отрицательных чисел, об их праве на существование велись еще во времена Ньютона в конце XVII века.

Поводом для введения отрицательных чисел явилось, по-видимому, желание решать уравнения вида $x + a = b$ для любых положительных чисел a и b .

Введение рациональных чисел дало возможность решать уравнения вида $ax = b$, где a и b — целые числа ($a \neq 0$).

После того как в Древней Греции была доказана иррациональность числа $\sqrt{2}$, т.е. невозможность решить уравнение $x^2 = 2$, имея в своем распоряжении только рациональные числа, человечество вновь столкнулось с необходимостью расширить свой числовой запас.

Расширить множество рациональных чисел так, чтобы уравнение $x^2 = 2$ в новом, более широком, множестве имело корень, можно не только так, как это делается в учебнике, но и следующим образом:

Введем символ j и положим $j^2 = 2$. Будем рассматривать выражения вида $a + bj$, где a и b — произвольные рациональные числа.

Сформулируем правила действий над нашими кандидатами в

новые числа:

$$(a_1 + b_1j) + (a_2 + b_2j) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)j;$$

$$(a_1 + b_1j)(a_2 + b_2j) = (a_1a_2 - 2b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)j.$$

(Определяя умножение, мы воспользовались тем, что $j^2 = -2$.)

Сумма и произведение наших выражений вновь оказались выражениями того же вида. Таким образом, в множестве выражений $a + bj$ мы определили две операции — сложение и умножение. Нетрудно проверить, что эти операции обладают всеми привычными свойствами сложения и умножения (коммутативность, ассоциативность и т.д.). Роль нуля играет выражение $0 + 0j$.

Легко проверить, что выражения вида $a + 0j$ ведут себя так же, как рациональные числа. Поэтому рациональное число a и выражение $a + 0j$ можно отождествить друг с другом. Значит, можно считать, что множество \mathbb{Q} рациональных чисел является подмножеством множества выражений $a + bj$.

Покажем, что в этом множестве возможно и деление, т.е. что уравнение $(a + bj)x = c + dj$, где $a + bj \neq 0 + 0j$, имеет решение

$$\begin{aligned} \frac{c + dj}{a + bj} &= \frac{(c + dj)(a - bj)}{(a + bj)(a - bj)} = \frac{(ac - 2bd) + (ad - bc)j}{a^2 - 2b^2} = \\ &= \frac{ac - 2bd}{a^2 - 2b^2} + \frac{ad - bc}{a^2 - 2b^2}j. \end{aligned}$$

$$\text{Значит, } x = \frac{ac - 2bd}{a^2 - 2b^2} + \frac{ad - bc}{a^2 - 2b^2}j.$$

(Из $a + bj \neq 0 + 0j$ следует, что $a \neq 0$ или $b \neq 0$; тогда из рациональности чисел a, b вытекает $a^2 - 2b^2 \neq 0$.)

Обозначим множество новых «чисел» — выражений вида $a + bj$ ($a, b \in \mathbb{Q}$) — через $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. В таком множестве уравнение $x^2 = 2$ имеет решение: легко проверить, что $(0 + 1j)^2 = 2$. Выражение $0 + 1j = j$ естественно обозначить через $\sqrt{2}$.

Мы добились, чего хотели. Более того, некоторые другие уравнения, которые не имели корней в множестве \mathbb{Q} рациональных чисел, также стали обладать корнями в множестве $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$; например, уравнение $x^2 - 2x - 1 = 0$ имеет корень $1 + \sqrt{2}$. Но вот уравнение $x^2 = 3$, не имевшее корней в множестве \mathbb{Q} , не имеет их и в множестве $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ (докажите!).

Таким образом, если мы пойдем тем же путем, то, чтобы получить возможность решать все уравнения вида $x^n = k$, где k — натуральное число, нам пришлось бы расширять множество \mathbf{Q} бесконечное число раз. Человечество, введя понятие *действительного числа*, решило эту проблему по-другому, «одним махом».

Однако уравнение $x^2 + 1$ и в множестве \mathbf{R} действительных чисел не имеет решений.

Числа, не похожие ни на что

В школьном учебнике говорится: если дискриминант квадратного уравнения отрицателен, то оно не имеет корней. Так считали со времен Вавилона. Лишь в XVI веке математики поняли, что корни четной степени из отрицательных чисел могут быть полезными. Им в ряде случаев для получения обычного (действительного!) корня уравнения приходилось оперировать с бессмысленными выражениями вроде $5 + 2\sqrt{-3}$.

Конечно, математики делали это не с легким сердцем — необычные «числа» долго сохраняли несколько мистическую окраску (им даже придумали название — мнимые). Сначала выражения вида $a + b\sqrt{-1}$ применялись исключительно во вспомогательных целях, и по-прежнему считалось, что уравнение $x^2 + 1 = 0$ не имеет корней. Однако постепенно у математиков крепло убеждение, что всякое уравнение

$$a_n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

с действительными коэффициентами должно иметь корни. «Пусть это будут даже не числа», — говорили они. Стоп! Что значит «не числа»? Что имели в виду дерзкие математики? Еще и отрицательные числа не получили «гражданских прав», а тут какие-то новые «не числа».

А в самом деле, что требуется от объектов, претендующих на звание «корень алгебраического уравнения»? Нужно, чтобы их можно было подставить вместо переменной x , произвести вычисления и сравнить с нулем.

Другими словами, нужны какие-то объекты, обладающие свойствами действительных чисел, но чтобы их было «больше», чем последних, с тем чтобы в тех случаях, когда для решения алгебраических уравнений «не хватает» действительных чисел, прибегнуть к помощи таких объектов.

Какие же свойства действительных чисел важны? Оказыва-

ется, множество действительных чисел является полем¹. Множество \mathbb{Q} рациональных чисел тоже является полем.

Если добавить i

Попробуем подобно тому, как мы поступили с полем рациональных чисел и уравнением $x^2 = 2$, расширить поле \mathbb{R} действительных чисел, присоединив к нему «корень» уравнения $x^2 + 1 = 0$.

Пусть i — символ, единственным свойством которого является то, что он — корень уравнения $x^2 + 1 = 0$, т.е. $i^2 = -1$.

Рассмотрим выражения вида $a + bi$, где a и b — произвольные действительные числа; назовем их комплексными числами. Введем правила действий над комплексными числами:

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i;$$

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - a_1 b_2) + (b_1 b_2 + a_2 b_1) i.$$

Читатель без труда докажет, что множество комплексных чисел с так определенными сложением и умножением является полем.

Легко проверить, что комплексные числа вида $a + 0i$ ведут себя так же, как действительные числа. Поэтому действительное число a и комплексное число $a + 0i$ можно отождествить друг с другом. Значит, можно считать, что мы действительно расширили поле действительных чисел до поля комплексных чисел. В этом более широком поле уравнение $x^2 + 1 = 0$ имеет корень: $i^2 + 1 = 0$ (и даже два корня: $(-i)^2 + 1 = 0$).

Но чего мы добились? Только того, что уравнение $x^2 + 1 = 0$ приобрело корни? Оказывается, мы добились гораздо большего. Имеет место замечательная

Основная теорема алгебры

Любой многочлен $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ ненулевой степени имеет в множестве комплексных чисел хотя

¹ Напомним, что *полем* называется более чем одноэлементное множество M с двумя операциями — сложением и умножением, — удовлетворяющими следующим аксиомам:

сложение: 1. коммутативно, 2. ассоциативно, 3. существует ноль, 4. для каждого элемента из M существует противоположный;

умножение: 5. коммутативно, 6. ассоциативно, 7. существует единица, 8. для каждого ненулевого элемента из M существует обратный, 9. дистрибутивно по отношению к сложению.

бы один корень (который, конечно, может быть и действительным числом).

Первую попытку доказательства этой теоремы предпринял Д'Аламбер в 1746 году. Строгое же доказательство привел Гаусс в 1799 году.

Оказывается, основная теорема алгебры верна не только для многочленов с действительными коэффициентами, но и для многочленов с комплексными коэффициентами (или, как принято говорить, для многочленов *над полем комплексных чисел*).

Основная теорема алгебры позволяет дать изящный ответ на вопрос, сколько корней имеет произвольный многочлен n -й степени, *если рассматривать многочлены над полем комплексных чисел*.

Чтобы сформулировать этот ответ, нам понадобится понятие «кратности» (корня многочлена), а это понятие определяется через понятие «один многочлен делится на другой». Говорят, что многочлен $P_1(x)$ делится на многочлен $P_2(x)$, если существует такой многочлен $q(x)$, что $P_1(x) = q(x) \cdot P_2(x)$.

Понятие «делится» и «корень» тесно связаны:

Теорема 1 (Безу). *Остаток при делении многочлена $P(x)$ на двучлен $x - \alpha$ равен $P(\alpha)$. В частности, число α тогда и только тогда является корнем многочлена $P(x)$, когда $P(x)$ делится на $x - \alpha$.*

Теорему 1 нетрудно доказать самостоятельно. (Указание. Делите «уголком».)

Может случиться, что многочлен $P(x)$ степени n будет делиться не только на $x - \alpha$, то и на некоторую степень $x - \alpha$. В соответствии с этим условимся α называть k -кратным корнем многочлена $P(x)$, если $P(x)$ делится на $(x - \alpha)^k$, но не делится на $(x - \alpha)^{k+1}$. (Например, число 1 является двукратным корнем многочлена

$$P(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3 = (x - 1)^2(x + 3).$$

Теперь легко может быть доказана

Теорема 2. *Всякий многочлен $P(x)$ степени n (с действительными или комплексными коэффициентами) имеет в поле комплексных чисел ровно n корней (среди которых, разумеется, могут быть и действительные числа), если каждый корень считать столько раз, какова его кратность.*

Доказательство. По основной теореме алгебры многочлен $P(x)$ имеет в поле комплексных чисел хотя бы один корень.

Допустим, что α_1 есть корень многочлена $P(x)$. По теореме 1 $P(x) = (x - \alpha_1)q(x)$, где $q(x)$ — многочлен степени $n - 1$. (Даже если коэффициенты многочлена $P(x)$ — действительные числа, многочлен $q(x)$ будет, если α_1 — комплексный корень, иметь комплексные коэффициенты.)

Применим дальше то же рассуждение к многочлену $q(x)$. По основной теореме алгебры существует корень α_2 многочлена $q(x)$, так что $q(x) = (x - \alpha_2)h(x)$, где $h(x)$ — многочлен, степень которого уже $n - 2$. Повторяя это рассуждение $n - 1$ раз (применяя, конечно, при строгом изложении принцип математической индукции), мы, в конце концов, придем к разложению

$$P(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\dots(x - \alpha_n), \quad (*)$$

где a_n — коэффициент при старшей степени x^n многочлена $P(x)$.

Из тождества $(*)$ следует не только то, что комплексные числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ (среди них могут быть и равные!) являются корнями многочлена $P(x)$, но и то, что иных корней этот многочлен не имеет. В самом деле, если число β — корень многочлена $P(x)$, то

$$P(\beta) = a_n(\beta - \alpha_1)(\beta - \alpha_2)\dots(\beta - \alpha_n).$$

Но произведение комплексных чисел равно нулю в том и только в том случае, когда один из сомножителей равен нулю (докажите это). Поэтому один из множителей $\beta - \alpha_i$ равен нулю, т.е. $\beta = \alpha_i$. Это завершает доказательство теоремы 2.

По мере развития науки стало ясно, что без комплексных чисел нельзя обойтись в самых что ни на есть «действительных» делах. Когда появились самолеты, потребовалась теория обтекания крыла самолета потоком воздуха. Выяснилось, что самым естественным языком описания подобного процесса, т.е. языком аэродинамики, является теория функций комплексного переменного! Поэтому, когда вы видите современный авиалайнер, знайте, что его сделали гений конструкторов, инженеров, рабочих и... комплексные числа. То же можно сказать и о науке об обтекании судна водой — гидродинамике. Знаете такую игрушку — Ванька-встанька? Положишь Ваньку спать, а он тут же вскочит — у него самое устойчивое положение, когда он стоит. Подобными вопросами для гораздо более сложных механических, электрических и других систем занимается математическая теория устойчивости. И вновь оказывается, что ответ на то, является ли система устойчивой, кроется в свой-

ствах комплексных чисел, являющихся корнями некоторого многочлена, характеризующего рассматриваемую систему.

Современный самолет и Ванька-встанька – таков диапазон действия комплексных чисел. Мы привели только несколько областей их применения, поскольку все перечислить невозможно. Вот тебе и мнимые числа!

Мы расскажем сейчас для примера, как комплексные числа помогли ответить на некоторые важные вопросы относительно многочленов с действительными коэффициентами.

Многочлены, похожие на простые числа

Рассмотрим множество всех многочленов произвольной степени от переменной x . Вы умеете складывать и перемножать элементы этого множества, т.е. многочлены, умеете разлагать их на множители.

Это очень похоже на то, что вы умеете делать с натуральными числами. Натуральные числа вы еще умеете разлагать на простые множители. Вы, наверное, знаете, что это можно сделать всегда и притом единственным образом.

Роль простых чисел в теории многочленов играют так называемые неприводимые многочлены. Говорят, что многочлен $P(x)$ степени $n > 0$ *неприводим*, если он не делится ни на какой многочлен степени $0 < s < n$.

Аналог утверждения о разложении любого натурального числа в произведение простых множителей звучит так:

Теорема 3. *Всякий многочлен ненулевой степени разлагается в произведение неприводимых многочленов:*

$$P(x) = P_1(x)P_2(x)\dots P_m(x),$$

и это разложение является единственным с точностью до порядка и множителей нулевой степени.

Доказывая теорему 2, мы получили, что *всякий многочлен $P(x)$ степени n раскладывается над полем комплексных чисел в произведение линейных (т.е. первой степени) сомножителей* (см. равенство (*)).

Таким образом, *над полем комплексных чисел неприводимы только многочлены первой степени.*

А какие многочлены неприводимы над полем действительных чисел? Ответить на этот вопрос нам помогут, как ни странно, комплексные числа.

Пусть $z = a + bi$ – произвольное комплексное число. Назовем комплексное число $\bar{z} = a - bi$ *сопряженным* к числу z .

Нам понадобится

Теорема 4. Если z – корень многочлена $P(x)$ с действительными коэффициентами, то и \bar{z} – его корень.

Для доказательства отметим следующие свойства операции взятия сопряженного числа \bar{z} :

1. Число $\bar{\bar{z}}$, сопряженное к сопряженному числу \bar{z} , совпадает с исходным комплексным числом z .

2. Число z равно своему сопряженному \bar{z} тогда и только тогда, когда z является действительным числом.

3. Сопряженное к сумме комплексных чисел равно сумме чисел, сопряженных к слагаемым:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2.$$

4. Число, сопряженное к произведению, равно произведению сопряженных к сомножителям:

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2.$$

С помощью метода математической индукции можно показать, что правила 3 и 4 распространяются на сумму и произведение более чем двух чисел:

$$\begin{aligned}\overline{z_1 + z_2 + \dots + z_m} &= \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \dots + \bar{z}_m, \\ \overline{z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_m} &= \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \cdot \dots \cdot \bar{z}_m,\end{aligned}$$

в частности, $\bar{\bar{z}^n} = (\bar{z})^n$.

5. Произведение многочленов $x - z$ и $x - \bar{z}$ является многочленом с действительными коэффициентами:

$$(x - z)(x - \bar{z}) = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2).$$

Доказательство теоремы 4. Пусть

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

где $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ – действительные числа, z – корень этого многочлена. Тогда

$$0 = P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0.$$

Воспользуемся свойствами операции сопряжения:

$$\begin{aligned}0 = \bar{0} &= \overline{P(z)} = \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0} = \\ &= \overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1} z^{n-1}} + \dots + \overline{a_2 z^2} + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} = \\ &= \overline{a_n} \bar{z}^n + \overline{a_{n-1}} \bar{z}^{n-1} + \dots + \overline{a_2} \bar{z}^2 + \overline{a_1} \bar{z} + \overline{a_0} = \\ &= a_n \bar{z}^n + a_{n-1} \bar{z}^{n-1} + \dots + a_2 \bar{z}^2 + a_1 \bar{z} + a_0 = P(\bar{z}).\end{aligned}$$

Теорема 4 доказана.

Из теоремы 4 легко следует

Теорема 5. *Многочлен с действительными коэффициентами имеет четное число не действительных корней.*

В самом деле, по теореме 4 не действительные корни многочлена с действительными коэффициентами «ходят парами»: $(z; \bar{z})$.

Из теоремы 5 немедленно вытекает

Теорема 6. *Многочлен нечетной степени с действительными коэффициентами имеет по крайней мере один действительный корень.*

По основной теореме алгебры этот многочлен имеет нечетное число корней (равное его степени), следовательно, по теореме 5, они не могут быть все не действительными³.

С помощью комплексных чисел мы доказали вполне «действительную» теорему. Но гораздо более важным и интересным является следующий факт:

Теорема 7. *Любой многочлен с действительными коэффициентами, степень которого больше двух, приводим над полем действительных чисел.*

Доказательство. Если у многочлена $P(x)$ имеется действительный корень α , то $P(x) = q(x) \cdot (x - \alpha)$. Из придуманного вами доказательства теоремы 1 видно, что $q(x)$ — многочлен с действительными коэффициентами. Следовательно, в этом случае $P(x)$ есть произведение двух многочленов с действительными коэффициентами, т.е. $P(x)$ приводим над полем действительных чисел.

Пусть теперь все корни z_1, z_2, \dots, z_n многочлена $P(x)$ — не действительные. По теореме 6 n — четное и

$$P(x) = a_n(x - z_1)(x - z_2) \dots (x - z_n).$$

Разобьем корни z_1, \dots, z_n на сопряженные пары вида $(z_i; \bar{z}_i)$ и запишем $P(x)$ так:

$$P(x) = a_n(x - z_1)(x - \bar{z}_1)(x - z_2)(x - \bar{z}_2) \dots (x - z_k)(x - \bar{z}_k);$$

здесь $k = \frac{n}{2}$.

Каждый многочлен $P_i(x) = (x - z_i)(x - \bar{z}_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$, имеет, как мы видели, действительные коэффициенты. Следова-

² Попробуйте доказать эту теорему при помощи понятия непрерывности.

тельно, многочлен $P(x) = a_n P_1(x) P_2(x) \dots P_k(x)$ приводим над полем действительных чисел – ведь в этом произведении не менее двух сомножителей (из $n > 2$ следует $k > 1$).

Поэтому окончательный вывод о неприводимости многочленов над полем действительных чисел таков:

Теорема 8. *Над полем действительных чисел неприводимыми являются лишь многочлены первой степени и многочлены второй степени с отрицательным дискриминантом.*

Следствие. *Любой многочлен с действительными коэффициентами разложим в произведение многочленов первой и второй степени с действительными коэффициентами.*

О чем мы еще не рассказали? О том, какую роль сыграли многочлены в решении знаменитых задач древности – задач о трисекции угла, квадрате круга и удвоении куба. О том, как юным Нильсом Абе́лем было доказано, что формул для нахождения корней многочленов степени выше четвертой не существует; как еще более юный Эварист Галуа полностью решил проблему о решении уравнений в радикалах. Наконец, мы ведь еще не доказали основную теорему алгебры...

Нет, автор должен признаться, что взялся за непосильную задачу; он в изнеможении откладывает перо и просит читателя не быть слишком взыскательным.

ИРРАЦИОНАЛЬНОСТЬ И НЕПРИВОДИМОСТЬ

В.Олейников

Древние греки знали, что

величина $\sqrt{2}$ иррациональна

и умели это доказывать.

Если допустить, что величина $\sqrt{2}$ рациональна, и представить ее в виде несократимой дроби $\sqrt{2} = a/b$, то

$$2 = \frac{a^2}{b^2}, \quad 2b^2 = a^2.$$

Ясно, что число a делится на 2, a^2 – на 4 и, значит, b – на 2. Так что a/b – дробь сократимая.

Дробь $a/b = \sqrt{2}$ не может одновременно быть сократимой и несократимой, значит, величина $\sqrt{2}$ – не дробь. Это качество делало $\sqrt{2}$ нежеланным гостем в мире чисел, где царили гармония и порядок, простота и совершенство.

Своим появлением $\sqrt{2}$ был обязан диагонали единичного квадрата и неудачным попыткам измерить ее рациональными отрезками. Неудача сильно беспокоила древних греков, вызывая брожение умов. Реальность, выраженная геометрическим образом, настойчиво стучалась в мир чистого и прекрасного.

Прошло много веков, $\sqrt{2}$ завоевал себе место среди чисел, став другой реальностью – корнем уравнения $x^2 - 2 = 0$, и оказалось, что

число $\sqrt{2}$ иррационально

потому, что

многочлен $x^2 - 2$ неприводим.

О связи иррациональности и неприводимости – наш рассказ.

Неприводимость

Многочлен

$$P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

степени n по x с целыми коэффициентами

$$a_0, a_1, \dots, a_n; a_n \neq 0$$

называется *неприводимым*, если он не может быть представлен в виде произведения

$$P(x) = L(x) \cdot Q(x)$$

многочленов $L(x)$ и $Q(x)$ также с целыми коэффициентами, но степеней меньших, чем n . Если же подобное возможно, то $P(x)$ называется *приводимым*.

Например, многочлен $x^3 + x^2 + x + 1$ приводим (он равен $(x+1)(x^2+1)$ — проверьте!), а многочлен $x^2 + 1$ неприводим (подумайте, почему).

Линейный двучлен $a_0 + a_1x$ дает простейший пример неприводимого многочлена. Его единственный корень $x = -a_0/a_1$ есть число рациональное. Но

среди корней неприводимого многочлена степени $n \geq 2$ не может быть рациональных.

Это свойство вытекает из более общего факта:

Теорема. Если число α является корнем одновременно двух многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ и один из них, скажем $Q(x)$, неприводим, то многочлен $d \cdot P(x)$ при некотором целом $d \neq 0$ делится на $Q(x)$:

$$d \cdot P(x) = L(x) \cdot Q(x).$$

Эта теорема связана с именем прославленного немецкого математика К.Ф.Гаусса (1777—1855).

Она будет доказана далее, а указанное выше свойство вытекает из нее, поскольку линейный двучлен не может делиться на многочлен степени $n \geq 2$.

Открывается возможность получать много новых иррациональных чисел. Их следует искать среди корней неприводимых многочленов. В загадочную страну неприводимых многочленов нас вводит

Признак Эйзенштейна. Если для многочлена $P(x)$ можно указать такое простое число p , что старший коэффициент a_n не делится на p , а все остальные коэффициенты a_k делятся на

$p, k = 0, 1, \dots, n$, но свободный член a_0 , делясь на p , не делится на p^2 , то такой многочлен $P(x)$ неприводим.

Ф.Г.М.Эйзенштейн (1823—1852) — тоже немецкий математик — испытал немилость судьбы и равнодушие современников. Его идеи были восприняты лишь много лет спустя.

Доказательство

Пусть, в противоречие с утверждением, многочлен $P(x)$ с указанными свойствами коэффициентов приводим и потому разлагается в произведение

$$P(x) = L(x) \cdot Q(x)$$

многочленов

$$L(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_lx^l,$$

$$Q(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_mx^m$$

также с целыми коэффициентами. Их старшие коэффициенты b_l и c_m отличны от нуля, и будем считать для определенности, что $m \geq l \geq 1$. Собирая коэффициенты при одинаковых степенях x в произведении $L(x)Q(x)$, и сравнивая их с коэффициентами многочлена $P(x)$, получаем

$$a_0 = b_0c_0,$$

$$a_1 = b_0c_1 + b_1c_0,$$

$$a_2 = b_0c_2 + b_1c_1 + b_2c_0,$$

$$\dots$$

$$a_l = b_0c_l + b_1c_{l-1} + \dots + b_lc_0,$$

$$\dots$$

$$a_m = b_0c_m + b_1c_{m-1} + \dots + b_mc_0,$$

$$\dots$$

$$a_n = b_lc_m.$$

В первом из написанных равенств свободный член a_0 делится на p ; значит, или b_0 , или c_0 делится на p ; они не могут делиться на p одновременно, ибо $a_0 = b_0c_0$ не делится на p^2 .

Пусть b_0 делится на p , а c_0 не делится. Тогда переходим ко второму равенству: a_1 делится на p , b_0c_1 делится на p ; значит, b_1c_0 также делится на p и b_1 делится на p ...

...И так идем до $(l+1)$ -го равенства (при x^l): a_l делится на p , все b_0, \dots, b_{l-1} делится на p ; тогда b_lc_0 делится на p и, значит, b_l делится на p .

А теперь переносимся в последнее равенство: значит, старший коэффициент $a_n = b_1 c_m$ делится на p , что невозможно по условию признака.

Если же в первом равенстве c_0 делится на p , а b_0 не делится, то, начав все сначала, идем до $(m+1)$ -го равенства (при x^m), а затем опять переносимся в последнее.

Значит, разложение $P(x) = L(x)Q(x)$ невозможно, и многочлен $P(x)$ неприводим. Признак установлен, а нас уже ждут

Иррациональные радикалы

Многочлен $x^2 - 2$ неприводим по признаку Эйзенштейна (возьмите $p = 2$). Вместе с $\sqrt{2}$ мы получим новые иррациональные числа

$$\sqrt[n]{p},$$

где p — любое простое, а $n = 2, 3, \dots$ Каждое такое число есть корень многочлена

$$P(x) = x^n - p,$$

который неприводим по признаку Эйзенштейна. Число

$$\sqrt[n]{p_1 \dots p_k}$$

иррационально, если p_1, \dots, p_k — различные простые числа. Это число есть корень неприводимого многочлена

$$P(x) = x^n - p_1 \dots p_k.$$

К этим иррациональностям можно добавить

$$\sqrt[l]{a + \sqrt[n]{b} + \dots + \sqrt[n]{p_1 \dots p_k}}$$

при любых натуральных a, b, \dots (Попробуйте сами построить многочлены для этих монстров и доказать их неприводимость.)

Рассмотренные примеры иллюстрируют действие признака Эйзенштейна. Однако в них мы еще недалеко ушли от древних греков. Иррациональность последнего выражения легко может быть доказана последовательным возведением в степени l, m, \dots , n и таким же рассуждением, как при доказательстве иррациональности числа $\sqrt{2}$. Более внушительно выглядит сумма радикалов

$$\frac{a_1}{b_1} \sqrt[n_1]{p^{m_1}} + \dots + \frac{a_k}{b_k} \sqrt[n_k]{p^{m_k}}.$$

Если все дроби

$$\frac{m_1}{n_1}, \dots, \frac{m_k}{n_k}$$

правильные и различные, то указанная сумма представляет собой иррациональное число. Действительно, предположим противное: пусть эта сумма равна a/b . Обозначим $N = n_1 \dots n_k$. Тогда число $\sqrt[N]{p}$ есть корень многочлена с целыми коэффициентами

$$\frac{a_1 B}{b_1} x^{\frac{m_1 N}{n_1}} + \dots + \frac{a_k B}{b_k} x^{\frac{m_k N}{n_k}} - \frac{aB}{b},$$

где $B = b \cdot b_1 \dots b_k$. Степень этого многочлена меньше N . По сформулированной выше теореме он должен делиться на неприводимый многочлен $x^N - p$ степени N , что невозможно.

Это занятие можно с успехом продолжить и дальше (например, комбинируя последний пример с предпоследним). Успех окрыляет и рождает иллюзии. Может показаться, что, нагромождая радикалы друг на друга и применяя четыре арифметических действия к целым числам a, b, \dots , мы всегда без особых хлопот будем получать новые иррациональные числа... От иллюзий в математике хорошо помогают «частные случаи». Одним из них является задача об иррациональности радикала $\sqrt[n]{a^n + b^n}$ при любых натуральных a, b и $n \geq 3$, равносильная «великой теореме Ферма»:

Уравнение $a^n + b^n = c^n$ неразрешимо в натуральных a, b, c при $n \geq 3$.

Эту задачу оставил в наследство потомкам П. Ферма – французский математик XVII века. С тех пор, вот уже триста с лишним лет, ее безуспешно пытаются решить лучшие (и худшие) математики всего мира. Привлекая своей «доступностью», она стала предметом внимания и многих любителей математики, поглотив, подобно болотной трясине, не одну наивную необученную душу.

В 1908 году немецкий богач П. Вольфскель предложил крупную денежную премию за доказательство «великой теоремы». С тех пор, все время нарастая, идет лавина ошибочных «решений». И даже девальвация марки в 30-х годах, сильно обесценившая эту премию, не остановила это «творчество».

Вывод очевиден – массовое производство иррациональных радикалов представляется перспективным, но в то же время дьявольски опасным делом.

Вариации

Признак Эйзенштейна далеко не всегда решает вопрос о неприводимости многочлена $P(x)$, ибо он требует, чтобы все коэффициенты a_0, a_1, \dots, a_{n-1} , кроме старшего a_n , имели общий простой делитель p . Существует много многочленов, как, например,

$$x^2 + 1, x^4 + 1, x^6 + x^3 + 1,$$

не имеющих такого делителя. Тем не менее и здесь признак Эйзенштейна нельзя считать исчерпанным — следует только «расшевелить» $P(x)$, меняя переменную x .

Вопрос о неприводимости многочлена

$$P(x) = x^2 + 1$$

сводится к признаку Эйзенштейна следующим образом. Если бы $P(x)$ был приводим, то и $P(x+1)$ был бы приводим. Но $P(x+1) = x^2 + 2x + 2$ неприводим по признаку Эйзенштейна при $p = 2$. Многочлены $x^4 + 1, x^6 + x^3 + 1$ неприводимы по той же причине. Аналогичное преобразование решает вопрос о неприводимости многочлена

$$P(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1,$$

называемого многочленом «деления круга».

Многочлен $P(x)$ приводим, если $n = p \cdot k$ — составное число, так как

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{x^n - 1}{x - 1} = \frac{(x^p)^k - 1}{x - 1} = \frac{(x^p - 1)(x^{p(k-1)} + x^{p(k-2)} + \dots + 1)}{x - 1} = \\ &= (x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + 1)(x^{p(k-1)} + x^{p(k-2)} + \dots + 1), \end{aligned}$$

и неприводим, если $n = p$ — простое число.

Действительно, если бы $P(x)$ был приводим в этом случае, то и $P(x+1)$ был бы приводим. Но

$$P(x+1) = \frac{(x+1)^p - 1}{(x+1) - 1} = x^{p-1} + C_p^1 x^{p-2} + \dots + C_p^{p-1}.$$

Все коэффициенты¹, кроме старшего, делятся на p , ибо

$$C_p^k = \frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{k!} \quad (k < p),$$

¹ Мы пользуемся биномиальными коэффициентами C_p^k и формулой бинома Ньютона.

числитель делится на p , а знаменатель не делится. Кроме того, свободный член равен $C_p^{p-1} = p$ и не делится на p^2 . Тогда, согласно признаку Эйзенштейна, $P(x+1)$ неприводим, а значит, неприводим и $P(x)$.

Из доказанной неприводимости $P(x)$ следует, что среди корней уравнения деления круга

$$x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + 1 = 0$$

при любом простом $p \geq 3$ не может быть рациональных.

Можно доказать, что уравнение деления круга не имеет и действительных корней – все они комплексные числа, – и задать более трудный вопрос: когда эти корни «не слишком иррациональны», т.е. когда они представимы квадратичными радикалами (это значит, что их можно получить, применяя к целым числам четыре арифметических действия и операцию извлечения квадратных корней)? Этот вопрос, в сущности, интересовал еще древнегреческих математиков, так как он равносильен такой задаче на построение: при каких p можно построить правильный p -угольник циркулем и линейкой?

В юности Гаусс справился с этой задачей и доказал², что корни уравнения деления круга выражаются квадратными радикалами тогда (и только тогда³), когда p есть *простое число Ферма*, $p = 3, 5, 17, 257, \dots, 2^{2^k} + 1, \dots$ Гаусс очень гордился своим открытием и даже «выразил желание, чтобы в памятнике на его могиле был увековечен семнадцатиугольник».

К другим, более скромным достижениям Гаусса относится

Лемма о примитивных многочленах

Эта лемма поможет нам дать обещанное доказательство теоремы. Многочлен

$$P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

называется *примитивным*, если его коэффициенты a_0, a_1, \dots, a_n не имеют общих простых делителей.

Лемма Гаусса утверждает, что

произведение двух примитивных многочленов есть снова примитивный многочлен.

² Подробности этого события отражены С.Г.Гиндикиным в «Рассказах о физиках и математиках» (М.: Наука, 1981. – Серия «Библиотечка «Квант», вып.14).

³ Эта часть утверждения доказана П.Л.Ванцелем (1814–1848) – репетитором Политехнической школы в Париже.

Эта лемма используется во многих теоремах теории чисел и алгебры. Читатель, прошедший доказательство признака Эйзенштейна, легко освоит и доказательство, приведенное ниже, ибо они имеют между собой много общего.

Допустим противное, что произведение примитивных многочленов

$$L(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_lx^l,$$

$$Q(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_mx^m$$

есть многочлен

$$P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n,$$

не являющийся примитивным. Пусть тогда p — один из простых делителей его коэффициентов. Пусть b_i — самый младший коэффициент $L(x)$, не делящийся на p , $0 \leq i \leq l$, а c_j — самый младший коэффициент $Q(x)$, не делящийся на p , $0 \leq j \leq m$. Такие коэффициенты обязательно найдутся, иначе $L(x)$ и $Q(x)$ не были бы примитивными. Коэффициент при x^{i+j} в произведении

$$L(x)Q(x)$$

имеет вид

$$\dots + b_{i-1}c_{j+1} + \dots + b_{i+1}c_{j-1} + \dots$$

и не делится на p , так как все слагаемые этой суммы, кроме одного b_ic_j , делятся на p . С другой стороны, эта сумма равна a_{i+j} — коэффициенту многочлена $P(x)$ и должна делиться на p . Полученное противоречие доказывает лемму.

И наконец,

Доказательство теоремы,

которая утверждает, что любой многочлен $P(x)$, имеющий общий корень α с неприводимым многочленом $Q(x)$, делится на него после умножения на некоторое целое $d \neq 0$.

Разделим многочлен $P(x)$ на $Q(x)$ «с остатком»:

$$\begin{array}{r|l} a_n x^n + \dots + a_0 & c_m x^m + \dots + c_0 \\ - & \underline{a_n x^n + \dots} \\ \hline & \dots \\ & \underline{r_{m-1} x^{m-1} + \dots} \end{array}$$

В результате получим, что

$$P(x) = L_1(x)Q(x) + R_1(x).$$

Частное $L_1(x) = \frac{a_n}{c_m} x^{n-m} + \dots$ и остаток $R_1(x) = r_{m-1}x^{m-1} + \dots$ будут многочленами от x с коэффициентами – рациональными числами.

Если $P(x)$ разделится на $Q(x)$ без остатка: $R_1 \equiv 0$, то все уже доказано, ибо тогда

$$P(x) = L_1(x)Q(x) = \frac{1}{d}L(x)Q(x),$$

где d – общий знаменатель коэффициентов многочлена $L_1(x)$.

Если же $R_1(x) \neq 0$, то его степень по x будет строго меньше степени делителя $Q(x)$, а число α , будучи одновременно корнем $P(x)$ и $Q(x)$, является также корнем многочлена $R_1(x)$:

$$R_1(\alpha) = P(\alpha) - L_1(\alpha)Q(\alpha) = 0.$$

Разделив $Q(x)$ на $R_1(x)$, получим в остатке новый многочлен $R_2(x)$ с аналогичным свойством. Его степень будет строго меньше степени $R_1(x)$, а значит, и степени $Q(x)$.

Последовательно деля $Q(x)$ на получающиеся остатки $R_1(x)$, $R_2(x)$, ..., $R_k(x)$, придем либо к противоречию:

$$R_k(x) \equiv c \neq 0,$$

и α не может быть корнем $R_k(x)$, либо к тому, что $Q(x)$ разделится на $R_k(x)$ без остатка: $Q(x) = L_k(x)R_k(x)$. Приводя рациональные коэффициенты многочленов $L_k(x)$, $R_k(x)$ к общему знаменателю и вынося за скобки общие делители числителей, перепишем это равенство в виде

$$Q(x) = \frac{a}{b}[L(x)R(x)],$$

где a/b – несократимая дробь, а $L(x)$, $R(x)$ – примитивные многочлены.

Остается показать, что числовой коэффициент a/b в последнем разложении есть целое число, т.е. что $b = \pm 1$. Допустим противное, и пусть p – простой делитель числа b . Тогда из равенства

$$bQ(x) = a[L(x)R(x)]$$

видим, что все коэффициенты правой части делятся на p ; a не может делиться на p – в противном случае дробь a/b сократима. Значит, на p делятся все коэффициенты многочлена $L(x)R(x)$, что невозможно по лемме Гаусса.

Значит, многочлен

$$Q(x) = [\pm aL(x)] \cdot R(x)$$

приводим, что противоречит условию теоремы и тем самым полностью ее доказывает.

Давно канули в небытие древние греки. Миновала средневековая неразбериха. Уходил и XIX век, классический век математики. За ним надвигался наш век – век XX...

НЕПРИВОДИМОСТЬ И ИРРАЦИОНАЛЬНОСТЬ

В.Олейников

Созданная на рубеже XIX и XX веков теория алгебраических чисел стала новым стимулом для изучения неприводимых многочленов. *Алгебраическое число* α — это просто корень многочлена с целыми коэффициентами:

$$P(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + \dots + a_n\alpha^n = 0.$$

Все радикалы, которые мы рассматривали в предыдущей статье, — алгебраические числа. Однако понятие алгебраического числа значительно шире: еще в начале прошлого века П.Руффини (1765—1822) и Н.Г.Абель (1802—1829) показали, что не всякое уравнение степени выше четвертой разрешимо в радикалах. Алгебраические числа, таким образом, не исчерпываются иррациональными радикалами и рациональными числами.

Но зато алгебраические числа тесно связаны с неприводимыми многочленами. Именно, *любое алгебраическое число является корнем единственного (с точностью до числового множителя) неприводимого многочлена*. Это следует из теоремы (см. статью «Иррациональности и неприводимость» в этом сборнике).

Свойство неприводимости стало предметом пристального внимания многих выдающихся математиков. Наряду с поисками общих свойств (таких, как в теореме) исследователям не давал покоя признак Эйзенштейна. Чувствовалось, что за этим признаком скрывается какой-то общий принцип, выявление которого позволит получать новые более общие признаки. Так и оказалось на самом деле. Дальнейшее продвижение здесь связано с возможностью перевода свойства неприводимости на язык геометрических образцов. Основа этого языка была заложена великими Ньютоном за 200 лет до описываемых событий и носит его имя.

Диаграмма Ньютона

Для построения диаграммы Ньютона многочлена $P(x)$ по заданному простому p необходимы:

- 1) координатная плоскость $ОКМ$ ($ОК$ – горизонтальная, а $ОМ$ – вертикальная оси);
- 2) линейка, гвозди, молоток;
- 3) немного терпения.

Потому что сначала наносится *основа* – каждому одночлену $a_k x^k$ из $P(x)$ становится в соответствие точка с координатами $(k; l)$; l – это наибольшая степень числа p , при которой a_k делится на p^l . Набор всех таких точек ($k = 0, 1, \dots, n$) и есть основа диаграммы.

На рисунке 1 – основа многочлена

$$P(x) = 12 + 2x + 4x^2 + x^4 + x^5 + 2x^6 + 4x^7$$

при $p = 2$. Свободный член a_0 делится на p^2 , но уже не делится на p^3 – имеем точку $(0; 2)$, a_1 делится на p – точка $(1; 1)$, a_2 дает точку $(2; 2)$.

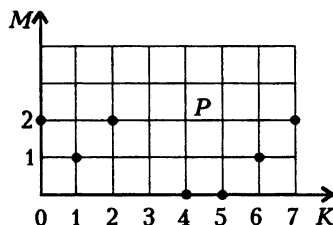


Рис. 1

Внимание! Если $a_k = 0$, то точку основы вообще не наносим.

В нашем случае $a_3 = 0$ не дает точки основы.

Если a_k не делится на p , то $l = 0$ и точка $(k; 0)$ попадает на ось $ОК$.

В нашем случае a_4 и a_5 не делятся на p , a_6 делится на p , a_7 делится на p^2 (см. рис.1).

Будем считать, что вместе со старшим коэффициентом a_n у многочлена $P(x)$ не равен нулю и свободный член a_0 . Иначе $P(x)$ всегда приводим (докажите!) и поэтому нам не интересен. На плоскости $ОКМ$, таким образом, будут нанесены по крайней мере две точки:

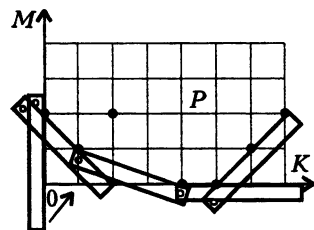


Рис. 2

начальная точка основы – у нас $(0; 2)$ – и ее *конечная* точка – $(7; 2)$.

А теперь диаграмма (рис.2). Берем молоток и вбиваем гвозди во все точки основы, затем приставляем линейку вертикально к гвоздю, вбитому в начальную точку. Вращаем ее против часовой стрелки, пока она не упрется в другой гвоздь

основы (у нас $(1; 1)$). Соединяя эти точки отрезком, получаем первое звено диаграммы. Для получения следующего звена нужно вращать линейку вокруг второго гвоздя $(1; 1)$ до встречи с новой точкой основы.

Вращаем линейку дальше и наносим остальные звенья, пока, наконец, не доберемся до конечной точки основы и не получим последнее звено.

Диаграмма Ньютона готова и изображена на рисунке 2. Она представляет собой вогнутую вверх ломаную и всегда имеет хотя бы одно звено.

Постройте сами диаграмму Ньютона для многочлена

$$Q(x) = 16 + 4x + 8x^2 + 2x^3 + 8x^6$$

по простому $p = 2$.

Лишние точки (у нас $-(2; 2)$) не должны смущать читателя – во всяком стоящем производстве не обойтись без отходов.

О звеньях. Они бывают трех сортов:

Составные, простые, примитивные

Звено диаграммы Ньютона назовем *простым*, если кроме концов на нем нет других точек с целочисленными координатами. В противном случае, если таковые имеются внутри звена, будем называть его *составным* (рис.3). Далее, простое звено назовем *примитивным*, если длина его проекции на горизонтальную ось OK равна единице.

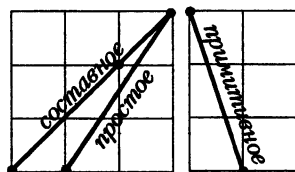


Рис. 3

Вот и все. Знакомство с образным языком неприводимости закончено. Пора начать на нем разговаривать. За все труды по изготовлению диаграммы Ньютона нас вознаграждает

Признак Дюма

Если при некотором простом p диаграмма многочлена $P(x)$ состоит ровно из одного простого звена, то такой многочлен неприводим.

Гюстав Дюма жил в Швейцарии и активно занимался задачей о неприводимости в начале нашего столетия. Этот признак получен им в 1906 году.

Признак Дюма позволяет ... нарисовать признак Эйзенштейна, глубже понять его и запомнить.

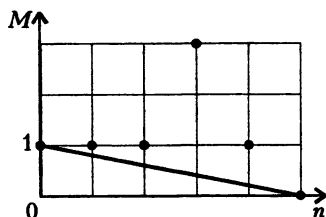


Рис. 4

По условию признака Эйзенштейна все коэффициенты многочлена $P(x)$, кроме старшего, делятся на p , а свободный член a_0 делится на p и не делится на p^2 . Эту ситуацию отражает рисунок 4.

XX не терпит остановок¹ и сожалений об упущенных возможностях.

Признаки, признаки, признаки...

На рисунке 5 еще один признак. Заключение в словесную форму, он приобретает «большой вес»:

Если для многочлена $P(x)$ нечетной степени $2n + 1$ можно указать такое простое число p , что старший коэффициент a_{2n+1} не делится на p , а все остальные коэффициенты a_k делятся на p , $k = 0, 1, \dots, 2n$, но дополнительно коэффициенты

a_k при $k = 0, 1, \dots, n$ делятся и на p^2 , а свободный член

a_0 , делясь на p^2 , не делится на p^3 , то такой многочлен $P(x)$ неприводим.

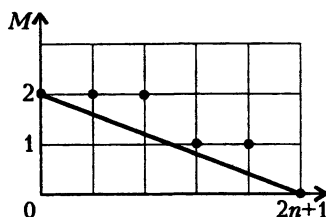


Рис. 5

Признак Дюма не исчерпан! Каждый желающий может стать обладателем собственного признака, поднимая все выше конец звена и следя за тем, чтобы оно оставалось простым.

Вывод очевиден: массовое производство признаков – перспективное и в то же время абсолютно безопасное дело².

Снова иррациональность

Среди изобилия признаков неприводимости нашлось место и признаку иррациональности (доказательство см. в Приложении.)

Если при некотором простом p диаграмма многочлена $P(x)$

¹ Кое-что о доказательстве признака Дюма неторопливый читатель найдет в Приложении.

² Но вряд ли оно доставит нам лавры Эйзенштейна.

не содержит примитивных звеньев (составные разбиты на простые), то среди его корней не может быть рациональных.

Рассмотрим пример

$$P(x) = 16 + 8x + 2x^2 + 2x^3 + x^4.$$

Существует верный способ отыскать все рациональные корни любого многочлена $P(x)$. Нужно начать делить его на всевозможные двучлены $b_0 + b_1x$. От целых чисел b_0, b_1 требуется, чтобы они были взаимно просты, и чтобы b_0 делил свободный, а b_1 — старший коэффициент многочлена $P(x)$ (докажите, у вас для этого все есть!).

В нашем случае делить придется на

$$1 \pm x, 2 \pm x, 4 \pm x, 8 \pm x, 16 \pm x.$$

Если $P(x)$ разделится на $b_0 + b_1x$ без остатка, то $x = -b_0/b_1$ — его рациональный корень. Если же $P(x)$ не разделится ни на один из указанных двучленов, то рациональных корней нет.

Признак иррациональности и диаграмма Ньютона по простому $p=2$ (рис.6) избавляет нас от этой утомительной процедуры³,

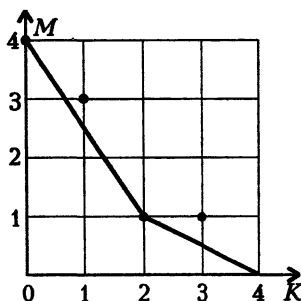


Рис. 6

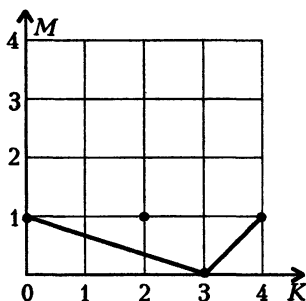


Рис. 7

сразу убедив в том, что рациональных корней у многочлена $P(x)$ нет, а значит и искать их не следует.

Еще пример:

$$P(x) = 6 + 2x^2 + 3x^3 + 6x^4,$$

который сначала ни в чем не убеждает, ибо диаграмма $P(x)$ по простому $p=2$ (рис.7) содержит примитивное звено. На отсутствие рациональных

³ Автор слегка преувеличил трудности — можно обойтись и подстановкой чисел $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 8, \pm 16$ в $P(x)$. Но это не меняет существа дела.

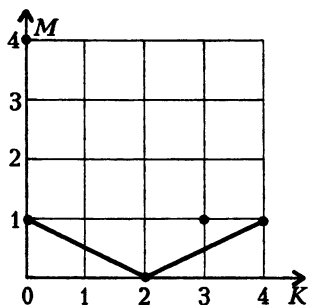


Рис. 8

корней указывает другая диаграмма по простому $p = 3$ (рис.8), не содержащая примитивных звеньев.

Докажите сами, что многочлен

$$P(x) = 10 + 5x + 10x^2 + 2x^4,$$

несмотря на изломанную диаграмму при $p = 2$, не только не имеет рациональных корней, но даже неприводим⁴.

Мы снова вернулись к иррациональным числам. Но не с пустыми руками. Теперь у нас есть арсенал средств (он и не снился древним грекам), позволяющий смело смотреть на уравнения высоких степеней.

Поиски новых признаков и новых примеров неприводимых многочленов велись еще долго после появления признака Дюма. Еще более общий признак получил О.Оре (1899—1968) — норвежский математик, известный читателям «Библиотечки «Квант» своим «Приглашением в теорию чисел», вып.3, 1980 г.

Сильное впечатление (на знатоков) в свое время (в 1929 г.) произвел многочлен Шура⁵

$$\frac{P(x)}{n!} = 1 + a_1 \frac{x}{1!} + \dots + a_{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!}.$$

Этот многочлен неприводим при любых целых a_1, \dots, a_{n-1} и требует для доказательства сразу нескольких диаграмм по различным простым p_1, \dots, p_k .

Значение диаграмм Ньютона не ограничивается одними признаками.

Вместо заключения

Вернемся к началу нашего рассказа («Иррациональность и неприводимость») и вспомним о славном нашествии иррациональных величин по дороге, указанной диагональю единичного квадрата. Вслед за ними в математику пришли *вещественные числа* — фундамент современного математического анализа.

История повторилась в другом геометрическом образе (диаграмме Ньютона). На этот раз он вызвал к жизни новый математический объект, называемый *p-адическими числами*. На языке *p-адического анализа*, открытого немецким матема-

⁴ Подсказка: взять $p = ?$.

⁵ И.Шур (1885—1941) — немецкий математик.

тиком К.Гензелем (1861—1941), и удалось сформулировать тот общий принцип, который лежит в основе всех признаков неприводимости. Скромные на первый взгляд завоевания геометрического образа (о них и был наш рассказ) помогли превратить теорию алгебраических чисел в могучую ветвь современной математики.

А что же неприводимость? Признаки не смогли исчерпать всего богатства неприводимых многочленов, и постепенно интерес к ним стал угасать. Но ненадолго.

В наше время — время ЭВМ и прогресса — интерес к свойству неприводимости разгорелся с новой силой и выразился в *алгоритмическом подходе*. Здесь главная цель — скорость, с которой методом проб, используя арифметические операции, можно решить вопрос о неприводимости любого, но конкретного, многочлена.

Зародилось алгоритмическое направление во времена Л.Кронекера (1823—1891) — известного немецкого математика, когда был придуман самый верный (но не самый быстрый) способ узнать — приводим данный многочлен или нет (весьма похожий на тот, о котором шла речь в нашем первом примере). Обогащенное идеями полузабытых признаков, это направление набирает темп. В самое последнее время (в 1982 г.) оно выразилось шедевром мастеров Голландской школы (А.Ленстра, Г.Ленстра, Л.Ловас) под названием «Алгоритм приведенного базиса», разрешившим скоростной вопрос в принципиальном плане.

События бурной эпохи гулким эхом отдались в кабинетной тиши и, в конце концов, заставили неприводимый многочлен служить человеку. Он трудится в *алгебраической теории кодирования*, и не исключено, что коды исправления ошибок помогали этим летом устранив срывы в изображении телепередач с Мексиканского футбольного чемпионата мира⁶. А в теории и практике *случайных процессов* неприводимый многочлен твердо стоит на страже государственных секретов, превращая их в *псевдослучайные сигналы* и охраняя от чуткого постороннего уха.

В страну неприводимых многочленов сделан первый шаг — мы познакомились с ее признанными лидерами. Но другие ее представители — как известные, так и не исследованные — остались за кадром. Страна неприводимых многочленов полна загадок и каждый новый шаг в нее рождает новые вопросы.

⁶ Напоминаем, что статья написана в 1986 году. (Прим. ред.)

Приложение

Здесь мы приводим обещанное пояснение доказательства признака Дюма. Но сначала

Разборка и сборка. Диаграмма Ньютона несет важную информацию о многочлене $P(x)$. Хранить ее удобно в разобранном виде.

Правило разборки. Разломаем диаграмму на звенья, в концах нарисует стрелки и перенесем их параллельно себе (как векторы) в начальную точку (рис.9). Так получается *связка* многочлена по простому p . Если точка основы лежит внутри звена (у нас – точка (6; 1) на последнем звене), то ломать звено в этой точке не следует.

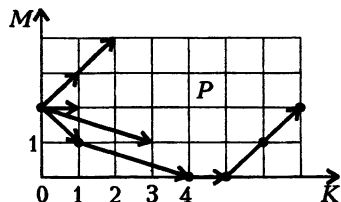


Рис. 9

Правило сборки. Двигаясь снизу вверх (против часовой стрелки), выкладываем векторы связки друг за другом (см. рис.9). Итак: *заданной диаграмме Ньютона соответствует ровно одна связка, и по заданной связке диаграмма восстанавливается однозначно.*

Остается заметить, что местоположение на оси OM точки приложения связки не играет существенной роли. Умножая $P(x)$ на подходящую степень p' (что не меняет свойства неприводимости), можно произвольно перемещать всю диаграмму, а вместе с ней и начальную точку, вдоль оси OM .

Теорема Дюма. *Связка произведения $P(x)Q(x)$ представляет собой объединение связок сомножителей $P(x)$ и $Q(x)$ (рис.10).*

Здесь $Q(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_m x^m$ – это еще один, какой-нибудь, многочлен (подойдет и $Q(x)$ из раздела «Диаграммы Ньютона»). Его основа, диаграмма и связка – пунктирные.

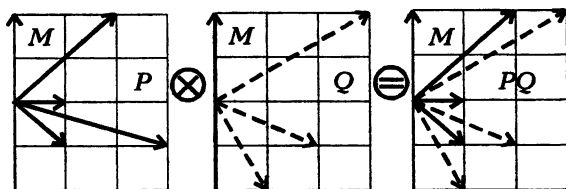


Рис. 10

Теорема Дюма показывает, как, зная диаграммы многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ по одному и тому же простому p , построить диаграмму их произведения. Для этого следует *наложить друг на друга связки сомножителей, совместив их начальные точки, а затем построить ломаную по правилам сборки (рис.11).*

Добавление. Если в связке произведения $P(x)Q(x)$ два звена частично или полностью совпадают, то одно из них следует вытянуть из связки и поставить вслед за другим.

Секрет признака Дюма теперь прост — если $P(x)$ приводим, то по теореме Дюма его связка всегда состоит либо из нескольких звеньев, либо из одного, но тогда непременно составного (см. Добавление еще раз).

Для доказательства признака иррациональности необходимо опять вспомнить теорему («Иррациональность и непроводимость»), нарисовать диаграмму линейного двучлена (она состоит ровно из одного примитивного звена) и вывести из теоремы Дюма утверждение:

Если все простые звенья связки имеют проекцию на ось OK длины $> k$, то все делители многочлена $P(x)$ имеют степень $> k$.

Доказательство теоремы Дюма основано на том, что умножению многочлена $P(x)$ на одночлен $b_k x^k$ соответствует на плоскости OK перенос основы $P(x)$ на вектор с координатами $(k; l)$, где $(k; l)$ — точка основы $Q(x)$, отвечающая одночлену $b_k x^k$. Дальнейшие рассуждения (вполне элементарные) не вошли в рамки этой статьи и мы их опускаем.

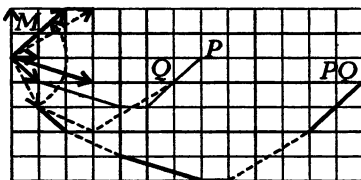


Рис. 11

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АЛГЕБРЫ

Л.Понтрягин

Здесь будет доказана основная теорема алгебры, утверждающая, что *всякий многочлен с комплексными коэффициентами имеет по крайней мере один комплексный корень*. При этом действительные числа считаются частным случаем комплексных чисел. Эта теорема впервые была доказана Гауссом в 1799 году для частного случая многочленов с действительными коэффициентами. Гаусс показал, что всякий такой многочлен имеет по крайней мере один действительный или комплексный корень. С точки зрения современной абстрактной алгебры теорема эта показывает, что поле комплексных чисел алгебраически замкнуто: это значит, что, рассматривая корни алгебраических уравнений (т.е. корни многочленов) в этом поле, мы не можем получить новых чисел.

В этом смысле поле комплексных чисел радикально отличается от поля действительных чисел, которое не является алгебраически замкнутым. При этом стоит заметить, что поле комплексных чисел получено из поля действительных чисел присоединением лишь корня одного уравнения

$$z^2 + 1 = 0.$$

Доказательство основной теоремы алгебры основано не на соображениях абстрактной алгебры, а на конкретном рассмотрении поля комплексных чисел. Строгое ее доказательство должно опираться на точное определение действительного числа и на точное определение непрерывности функции. Я здесь привожу не строгое, но геометрически убедительное доказательство, основанное на рассмотрении путей в плоскости комплексного переменного и их деформаций. Доказательство это не только доказывает теорему, но до некоторой степени объясняет, почему она верна.

Как следствие основной теоремы алгебры мы покажем, как многочлен с комплексными (в частности, действительными) коэффициентами раскладывается на множители.

Пути в плоскости комплексного переменного

Если точка z в плоскости P комплексного переменного перемещается во времени, когда время t меняется в пределах $t_0 \leq t \leq t_1$, то мы считаем, что в плоскости P задан путь (рис.1). Таким образом, *путь* есть функция $z(t)$ действительного переменного t , принимающая комплексные значения, заданная на отрезке $t_0 \leq t \leq t_1$,

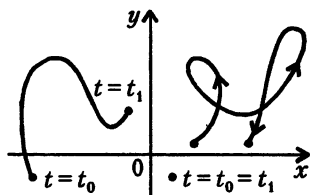
$$z(t); t_0 \leq t \leq t_1.$$

Формула эта задает путь. Речь идет здесь о движении точки, осуществляемом, естественно, без скачков. Так что функция $z(t)$ является *непрерывной* функцией. Мы не уточняем здесь понятие непрерывности, считая, что оно интуитивно ясно, как движение точки. Следует отчетливо понимать, что путь есть *процесс* движения, а не та линия, которую описывает движущаяся точка. Одну и ту же линию можно описать разными способами.

В процессе движения точка $z(t)$ в разные моменты времени может попадать в одну и ту же точку плоскости, так что не исключается равенство

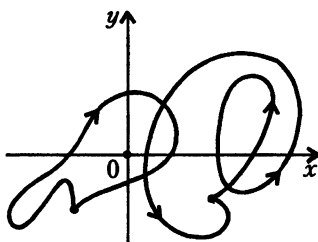
$$z(t_2) = z(t_3) \text{ при } t_2 \neq t_3.$$

Таким образом, путь может иметь самопересечения. Он может даже состоять из одной точки, именно в случае, когда точки $z(t)$ вовсе не перемещаются при изменении t . В дальнейшем, если это не будет оговорено специально, мы всегда будем предполагать, что *путь не проходит через начало координат*, т.е. что величина $z(t)$ ни при каком значении t не обращается в нуль. Точка $z(t_0) = z_0$ называется *началом* пути, а точка $z(t_1) = z_1$ — его *концом*. Если имеет место равенство $z_0 = z_1$, то путь называется *замкнутым* (рис.2).



Примеры путей

Рис. 1



Замкнутые пути

Рис. 2

Так как комплексное число $z(t)$ не обращается в нуль, для всякого значения t определен аргумент $\varphi(t)$ комплексного числа $z(t)$; но он определен лишь с точностью до слагаемого $2k\pi$. Эта неоднозначность для нас нежелательна. Для того чтобы освободиться от нее, мы выберем для начальной точки z_0 вполне определенный аргумент $\varphi_0 = \varphi(t_0)$.

Затем по мере возрастания t будем выбирать аргумент $\varphi(t)$ точки $z(t)$ так, чтобы при малых изменениях t он менялся мало. Этим неоднозначность выбора аргумента будет устранена. Добавление к аргументу числа $2k\pi$ при $k \neq 0$ привело бы сразу к резкому изменению величины $\varphi(t)$. Выбрав начальное значение аргумента $\varphi(t_0) = \varphi_0$ и следя за тем, чтобы аргумент $\varphi(t)$ точки $z(t)$ менялся вместе с t непрерывно, мы получаем вполне определенную функцию $\varphi(t)$, меняющуюся непрерывно, т.е. без скачков. Если выбрать начальное значение аргумента φ_0 иначе, изменив его на $2k\pi$, то он будет отличаться от ранее выбранного ровно на $2k\pi$ на всем протяжении изменения t . Отсюда следует, что при таком способе построения функции $\varphi(t)$ величина

$$\varphi(t_1) - \varphi(t_0) \quad (1)$$

не зависит от случайно выбранного начального значения аргумента числа z_0 .

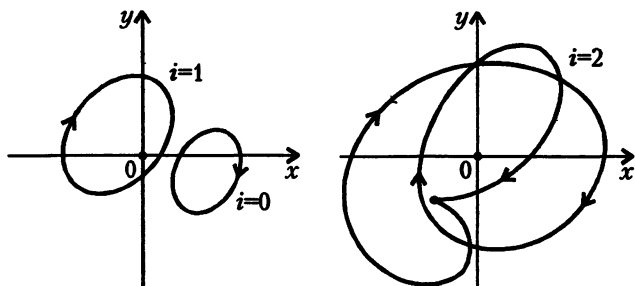
Если путь замкнут, то точки z_0 и z_1 совпадают и, следовательно, их аргументы $\varphi(t_0)$ и $\varphi(t_1)$ могут отличаться лишь на $2k\pi$. Поэтому число (1) в случае замкнутого пути есть $2k\pi$. Целое число k называется *индексом* замкнутого пути в плоскости комплексного переменного z . Следует еще раз подчеркнуть, что индекс замкнутого пути можно определить лишь в том случае, когда путь не проходит через начало координат.

Индекс k имеет простой геометрический смысл. Именно, он указывает, сколько раз точка $z(t)$, описывая замкнутый путь, обходит начало координат (рис.3).

Рассмотрим простой пример. Путь

$$1 + r(\cos t + i \sin t); \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad (2)$$

является замкнутым. Он описывает окружность с центром в точке 1 и радиусом r и проходит окружность с течением времени t равномерно против часовой стрелки. Если число r меньше 1, то окружность не содержит внутри себя начала координат и индекс пути равен 0. Если $r > 1$, то окружность содержит внутри себя начало координат, и индекс пути равен 1 (проверьте это самосто-

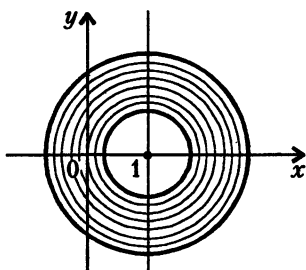


Пути с индексами 0,1,2

Рис. 3

ательно). В случае $r = 1$ путь проходит через начало координат и его индекс не определен. Если число r меняется, то путь (2), как говорят, деформируется (рис.4). Мы видим на этом примере, что во время деформации замкнутого пути его индекс не меняется, если только путь в какой-то момент деформации не проходит через начало координат.

Говоря, что путь описывается движением точки во времени, мы лишь хотели придать более интуитивный характер определению пути. В действительности же речь идет о зависимости комплексного переменного



Деформация пути $1 + r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ при изменении r

Рис. 4

z от некоторого действительного параметра t (который можно обозначить и другой буквой). Так, например, путь (2) можно записать в виде

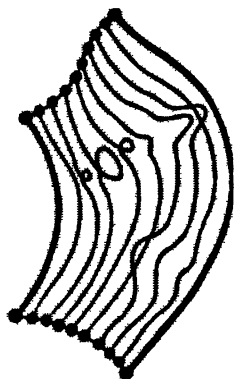
$$1 + r(\cos \alpha + i \sin \alpha), \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi, \quad (3)$$

где параметром уже является не t , а α . Ясно, что путь (3) описывается точкой $1 + z$, когда точка z описывает путь

$$r(\cos \alpha + i \sin \alpha); \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi.$$

Здесь r есть числовой параметр, от которого зависит сам путь. Говорят, что при изменении r путь (3) деформируется.

Введем понятие *деформации пути*. Будем считать, что путь *деформируется*, если он постепенно меняется без скачков в



Деформация пути

Рис. 5

зависимости от некоторого параметра, который для пути (3) обозначен через r , а вообще может быть обозначен и другой буквой, например, s (рис.5). Таким образом, деформирующийся путь записывается формулой

$$z(\alpha, s); \alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1; s_0 \leq s \leq s_1. \quad (4)$$

Здесь при каждом фиксированном значении параметра s мы имеем определенный путь, описываемый во время изменения α от α_0 до α_1 , а при изменении s сам путь меняется, деформируясь. Ясно, что если путь (4) замкнут, т.е. если при любом значении s имеет место равенство

$$z(\alpha_0, s) = z(\alpha_1, s),$$

то в течение деформации индекс пути должен меняться без скачков. А так как он есть целое число, то индекс этот остается постоянным. Конечно, это верно только в том случае, когда для произвольного значения s путь (4) не проходит через начало координат. В противном случае для этого значения s индекс пути не определен. Таким образом, мы можем высказать следующее утверждение:

Если замкнутый путь непрерывно деформируется, не проходя в процессе деформации через начало координат, то индекс его не меняется.

Дадим еще один пример замкнутого пути

$$r^n(\cos n\alpha + i \sin n\alpha); 0 \leq \alpha \leq 2\pi. \quad (5)$$

Ясно, что путь этот описывается точкой z^n , когда точка z описывает замкнутый путь

$$r(\cos \alpha + i \sin \alpha); 0 \leq \alpha \leq 2\pi.$$

Видно, что когда α меняется от 0 до 2π , аргумент точки z^n меняется от 0 до $2n\pi$. Таким образом, индекс пути (5) равен n (см. рис.6, где схематически показан случай $n = 3$).

Комплексные функции комплексного переменного

Если числовое значение комплексной переменной величины w можно найти, зная числовое значение другой комплексной переменной величины z , то переменная величина w называется *функцией* переменной величины z , что записывается в форме

$$w = f(z).$$

Если комплексная функция $f(z)$ комплексного переменного z имеет производную, то она называется аналитической функцией. Теория аналитических функций является теперь одним из важнейших разделов математики. Здесь нас будут интересовать лишь аналитические функции очень частного вида, именно, многочлены.

Рассмотрим многочлен

$$w = f(z) = z^n + a_1 z^{(n-1)} + \dots + a_{(n-1)} z + a_n, \quad (6)$$

где a_1, a_2, \dots, a_n суть комплексные коэффициенты, а n — неотрицательное целое число, которое называется *степенью* многочлена. Целью нашего исследования будет доказательство того, что многочлен (6) положительной степени имеет корень, т.е. что уравнение

$$f(z) = 0,$$

где $f(z)$ — многочлен (6) и $n > 0$, имеет решение. Для доказательства этого мы рассмотрим замкнутый путь

$$f(r(\cos \alpha + i \sin \alpha)); \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi, \quad (7)$$

который описывает точка $f(z)$, когда точка z описывает замкнутый путь

$$r(\cos \alpha + i \sin \alpha); \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi.$$

Случай, когда свободный член a_n многочлена $f(z)$ равен 0, не требует рассмотрения, так как в этом случае многочлен $f(z)$ имеет очевидный корень $z = 0$. Поэтому мы будем считать, что $a_n \neq 0$. Замкнутый путь (7) зависит от параметра r и при изменении параметра r деформируется. При $r = 0$ число z равно 0, и путь $f(z)$ состоит из неподвижной точки a_n . Таким образом, его индекс при $r = 0$ равен 0. Мы докажем, что если взять r достаточно большим, то индекс пути (7) равен n . Но по предположению $n \neq 0$, поэтому при изменении числа r от большого значения к нулю путь (7), деформируясь, пройдет при каком-то значении r через начало координат, а это и значит, что при

некотором значении z функция $f(z)$ обратится в нуль, т.е. корень у этого многочлена существует (рис.7).

Для доказательства того, что при достаточно большом r замкнутый путь (7) имеет индекс, равный n , продеформируем этот путь в более простой, индекс которого легко сосчитать.

Прежде всего мы разобьем многочлен f на сумму двух

$$f(z) = z^n + g(z),$$

где $g(z)$ задается формулой

$$g(z) = a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n.$$

Так как коэффициенты a_1, a_2, \dots, a_n многочлена $g(z)$ суть вполне определенные числа, то они все не превосходят по модулю некоторую константу C . Из доказанного в статье «Комплексные числа» (см. настоящий сборник) неравенства (8), распространенного на произвольное число слагаемых, следует, что при $|z| > 1$

$$|g(z)| \leq nC|z^{n-1}|. \quad (8)$$

Рассмотрим многочлен $f(z, s)$, зависящий от параметра s , $0 \leq s \leq 1$, задаваемый следующей формулой:

$$f(z, s) = z^n + sg(z).$$

Мы имеем равенство

$$z^n = f(z, s) - sg(z),$$

откуда

$$|z^n| \leq |f(z, s)| + |-sg(z)| \leq |f(z, s)| + nC|z^{n-1}|s \leq |f(z, s)| + nC|z^{n-1}|$$

(см. (8)). Отсюда следует

$$|f(z, s)| \geq |z^n| - nC|z^{n-1}|.$$

Обозначим $|z|$ через r , тогда последнее неравенство принимает вид

$$|f(z, s)| \geq r^n - nCr^{n-1} = r^{n-1}(r - Cn).$$

Таким образом, при $r > Cn$ правая часть предыдущего неравенства положительна. Следовательно, модуль функции $f(z, s)$ не обращается в нуль ни при каком значении s , если только $0 \leq s \leq 1$.

Обратим внимание теперь на тот факт, что при $s = 0$ многочлен $f(z, s)$ превращается в известный нам многочлен z^n . А индекс пути z^n , когда z описывает окружность $r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, нами

уже сосчитан (см. (5)). Он равен n . При $s = 1$ многочлен $f(z, s)$ превращается в многочлен $f(z)$, и определяемый им путь (7) имеет индекс, тоже равный n . Итак, мы доказали, что индекс пути (7), определяемый многочленом $f(z)$, при $r > Cn$ равен n . Из этого, как сказано выше, уже следует, что многочлен $f(z)$ обращается в нуль при некотором значении z , где $|z| < Cn$.

Итак, основная теорема алгебры доказана.

Деление многочленов

При делении целого положительного числа a на целое положительное число b мы приходим к равенству

$$a = bh + k, \quad (9)$$

где h и k — целые неотрицательные числа и $k < b$. Число h называется частным, а k — остатком при делении числа a на число b .

Способ деления целых чисел хорошо известен из арифметики. Но так же, как целые числа, можно делить друг на друга и многочлены. Будем исходить из двух многочленов

$$a(z) = a_0 z^p + a_1 z^{p-1} + \dots + a_p,$$

$$b(z) = b_0 z^q + b_1 z^{q-1} + \dots + b_q.$$

Мы будем предполагать здесь, что числа a_0 и b_0 не равны нулю, так что многочлен $a(z)$ имеет степень p , а многочлен $b(z)$ имеет степень q . В результате деления многочлена $a(z)$ на многочлен $b(z)$ мы можем прийти к следующему равенству, аналогичному равенству (9):

$$a(z) = b(z)h(z) + k(z), \quad (10)$$

где степень многочлена $k(z)$ меньше q . Многочлены $h(z)$ и $k(z)$ называются, соответственно, *частным* и *остатком* при делении многочлена $a(z)$ на многочлен $b(z)$.

Если $k(z) \equiv 0$, то говорят, что многочлен $a(z)$ *делится* на многочлен $b(z)$, а $h(z)$ является частным от их деления.

Равенство (9) доказано в арифметике, а равенство (10) должно доказываться в алгебре. Но деление многочленов не входит в ныне действующую школьную программу. Чтобы доказать (10), мы должны построить такие многочлены $h(z)$ и $k(z)$, которые удовлетворяют этому равенству. Процесс этого построения представляет собою очень важный алгоритм. Опишем его.

Если $p < q$, то тогда $h(z) = 0$, $k(z) = a(z)$, и равенство (10) выполнено.

Теперь мы будем строить многочлены $h(z)$ и $k(z)$ в предположении, что $p \geq q$. Сперва построим равенство

$$a(z) = b(z)h_1(z) + a_1(z), \quad (11)$$

в котором степень многочлена $a_1(z)$ меньше p . Для этого положим

$$h_1(z) = \frac{a_0}{b_0} z^{(p-q)}.$$

Тогда разность

$$a(z) - b(z)h_1(z) = a_1(z)$$

имеет степень меньше, чем p , так как в этом многочлене коэффициент при z^p равен нулю, а остальные степени z , входящие в этот многочлен, очевидно, меньше p . Таким образом, равенство (11) построено.

Если многочлен $a_1(z)$ имеет степень меньшую, чем q , то равенство (11) уже является равенством (10). В противоположном случае к многочлену $a_1(z)$ применим ту же процедуру, которая применена к многочлену $a(z)$ при построении равенства (11). И тогда мы получим для него равенство

$$a_1(z) = b(z)h_2(z) + a_2(z),$$

причем степень многочлена $a_2(z)$ уже меньше, чем степень многочлена $a_1(z)$. Если многочлен $a_2(z)$ уже имеет степень меньшую, чем q , то подставляя $a_1(z)$ из последнего равенства в равенство (11), мы получим

$$a(z) = b(z)(h_1(z) + h_2(z)) + a_2(z),$$

которое уже является равенством (10). Если многочлен $a_2(z)$ тоже имеет степень большую, чем q , то мы продолжим наше построение дальше, и в конце концов докажем нужное равенство (10).

Здесь мы описали процесс деления многочлена $a(z)$ на многочлен $b(z)$, т.е. нахождение многочленов $h(z)$ и $k(z)$, входящих в равенство (10). Докажем теперь, что они однозначно определены многочленами $a(z)$ и $b(z)$. Допустим, что наряду с равенством (10) имеет место равенство

$$a(z) = b(z)h_0(z) + k_0(z), \quad (12)$$

причем степень многочлена $k_0(z)$ меньше q . Вычитая равенство

(12) из равенства (10), получим

$$b(z)(h(z) - h_0(z)) = k_0(z) - k(z).$$

Так как степень многочлена $b(z)$ равна q , а степень многочлена $k_0(z) - k(z)$ меньше q , то последнее равенство может иметь место лишь при условии $h(z) - h_0(z) \equiv 0$, так что и $k(z) - k_0(z) \equiv 0$.

Многочлены с произвольными комплексными коэффициентами

Теперь существующий по основной теореме алгебры корень многочлена $f(z)$ с комплексными коэффициентами обозначим через z_1 . Докажем, что многочлен $f(z)$ делится на двучлен $(z - z_1)$. Производя деление многочлена $f(z)$ на многочлен первой степени $(z - z_1)$ по правилам, описанным в предыдущем разделе, мы получим частное, которое обозначим через $f_1(z)$, и некоторый остаток в виде многочлена нулевой степени, т.е. числа, которое мы обозначим через k . Таким образом, имеем

$$f(z) = f_1(z)(z - z_1) + k.$$

Так как $f(z_1) = 0$, то, полагая в предыдущем равенстве $z = z_1$, получаем $k = 0$.

Итак, многочлен $f(z)$ разделился на $(z - z_1)$, и мы имеем

$$f(z) = (z - z_1)f_1(z),$$

где $f_1(z)$ — многочлен степени $n - 1$, который, очевидно, начинается с члена z^{n-1} . Если $n > 1$, то $n - 1 > 0$; тогда многочлен $f_1(z)$ будет положительной степени и, по доказанному ранее, имеет некоторый корень z_2 . Таким образом, по только что доказанному, многочлен $f_1(z)$ разлагается на множители

$$f_1(z) = (z - z_2)f_2(z). \quad (13)$$

Продолжая этот процесс дальше, мы получим разложение $f(z)$ на n линейных множителей

$$f(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n).$$

Числа z_1, z_2, \dots, z_n являются корнями многочлена $f(z)$, и других корней многочлен $f(z)$, очевидно, не имеет. Может, однако, оказаться, что один и тот же корень встречается в этом разложении несколько раз. Группируя равные между собой корни, мы получаем разложение

$$f(z) = (z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} \dots (z - z_q)^{k_q},$$

где все корни z_1, z_2, \dots, z_q различны. Число k_1 называется *кратностью* корня z_1 , число k_2 — кратностью корня z_2 , и так далее, число k_q — кратностью корня z_q . Таким образом, число различных корней многочлена $f(z)$ может быть и меньше, чем n . Однако если учитывать кратность каждого корня, то сумма кратностей в точности равна n . В этом смысле многочлен $f(z)$ имеет ровно n корней.

Многочлены с действительными коэффициентами

Рассмотрим теперь случай, когда все коэффициенты многочлена $f(z)$ — действительные числа. О корнях такого многочлена можно высказать некоторые весьма интересные дополнительные соображения.

Для рассмотрения многочлена с действительными коэффициентами введем понятие числа \bar{z} , комплексно сопряженного данному комплексному числу z . Именно, если

$$z = x + iy,$$

то, по определению, число

$$z = x - iy \quad (14)$$

называется *комплексно сопряженным* с z . Таким образом, число \bar{z} , комплексно сопряженное с числом z , является зеркальным образом числа z относительно оси действительных чисел.

Если

$$z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha),$$

то

$$\bar{z} = r(\cos \alpha - i \sin \alpha) = r(\cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha)). \quad (15)$$

Таким образом, аргументы двух комплексно сопряженных чисел отличаются лишь знаком. Из формулы (14) следует, что

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2.$$

Из формулы (15) следует, что

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2.$$

Заметим еще, что равенство

$$\bar{\bar{z}} = z$$

имеет место тогда и только тогда, когда z есть действительное число.

Из трех предыдущих формул легко получить, что для многочленов $f(z)$ с действительными коэффициентами имеет место

равенство

$$\overline{f(z)} = f(\bar{z}).$$

Из этого равенства следует, что если z_1 есть корень многочлена $f(z)$ с действительными коэффициентами, то \bar{z}_1 есть также его корень. В случае, если z_1 есть действительное число, это утверждение бессодержательно. В случае, если z_1 не есть действительное число, утверждение указывает на существование наряду с корнем z_1 отличного от него корня \bar{z}_1 . Таким образом, если z_1 — не действительное число, то многочлен $f_1(z)$ (см. (13)) имеет делителем $(z - \bar{z}_1)$, и мы получаем разложение на множители

$$f(z) = (z - z_1)(z - \bar{z}_1)f_2(z).$$

Полагая в этом равенстве

$$z_1 = x_1 + iy_1,$$

получаем

$$f(z) = (z^2 - 2x_1z + x_1^2 + y_1^2)f_2(z).$$

Таким образом, мы выделили у многочлена $f(z)$ действительный квадратичный множитель $z^2 - 2x_1z + x_1^2 + y_1^2$. Отсюда следует, что многочлен $f_2(z)$ — также многочлен с действительными коэффициентами, так как он получается в результате деления многочлена $f(z)$ на действительный квадратичный трехчлен. Следовательно, у этого многочлена $f_2(z)$ комплексные корни опять попарно сопряжены. Если у него найдется корень, равный уже ранее найденному корню z_1 , то найдется и корень \bar{z}_1 . Таким образом, в этом случае из многочлена $f_2(z)$ выделится еще один квадратичный множитель, равный прежнему квадратичному множителю. Из этого видно, что кратность комплексного корня многочлена $f(z)$ с действительными коэффициентами равна кратности сопряженного корня, и мы получаем разложения многочлена $f(z)$ на действительные множители:

$$f(z) = (z^2 - 2x_1z + x_1^2 + y_1^2)^{k_1} \dots \\ \dots (z^2 - 2x_pz + x_p^2 + y_p^2)^{k_p} (z - z_{p+1})^{k_{p+1}} \dots (z - z_q)^{k_q}.$$

Заметим, что квадратичные множители вида

$$z^2 - 2x_i z + x_i^2 + y_i^2, \quad i = 1, 2, \dots, p,$$

в которых все y_i не равны нулю, уже не разлагаются на действительные множители.

ДАМА С СОБАЧКОЙ

А.Тоом

Давным-давно, когда я был студентом мехмата МГУ, один из старших друзей спросил меня: «Знаешь «Даму с собачкой»? – «Ну конечно», – ответил я, имея в виду рассказ А.П.Чехова. – «Нет, – сказал собеседник, – я про другое. Есть такое доказательство основной теоремы алгебры». И тут же рассказал мне очень красивое (хотя и нестрогое) рассуждение, которое в итоге оказалось одним из самых ярких моих впечатлений за все годы учебы. Однако, несмотря на свою наглядность, доказательство это, давно уже вошедшее в «математический фольклор», по моему, так до сих пор и не записано в своем наиболее доступном виде. Цель статьи – восполнить это досадное упущение.

Кто автор этого рассуждения – сказать трудно. Скорее всего, им следует считать К.Гаусса, который всю жизнь интересовался основной теоремой алгебры (называемой также теоремой Д'Аламбера – Гаусса) и дал несколько различных ее доказательств¹. Мне говорили, что в обиход московских математических кружков и студенческих семинаров это рассуждение ввел А.Н.Колмогоров, но я не смог проверить, правда ли это. И я не знаю, кто первым украсил его образами Чехова.

Прежде чем приступить к самому доказательству, давайте вспомним основные понятия из теории комплексных чисел. Те, кто с ними знаком, могут прямо перейти к четвертому разделу статьи.

Числа действительные и комплексные

Как известно, действительные числа естественно располагаются на числовой оси, т.е. на прямой, на которой отмечена

Опубликовано в «Кванте» №2 за 1990 год.

¹ О жизни и деятельности этого великого ученого можно узнать, в частности, из книги В.К.Бюлера «Гаусс. Биографическое исследование» (М.: Наука, 1989).

точка O , выбран масштаб и положительное направление (рис.1).

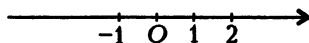


Рис. 1

Комплексные числа столь же естественно располагаются на комплексной плоскости, т.е. на плоскости, на которой задана система координат Oxy , причем ось Ox названа действительной, а ось Oy – мнимой (рис.2). Точкам, лежащим на действительной оси Ox , соответствуют привычные нам действительные числа. Точкам, лежащим на мнимой оси Oy , соответствуют мнимые числа, снабженные специальным множителем i . Вообще любой точке с координатами $(x; y)$ соответствует комплексное число $x + iy$, причем координата x называется его действительной, а координата y – его мнимой частью. Точке O – началу координат – соответствует комплексное число 0 , у которого и действительная, и мнимая части равны нулю. Буква i в теории комплексных чисел обозначает число, соответствующее точке с координатами $(0; 1)$.

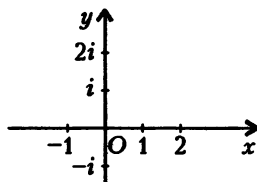


Рис. 2

Правила сложения, вычитания и умножения на действительное число для комплексных чисел такие же, как для векторов:

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

$$(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2),$$

$$k(x + iy) = kx +iky.$$

Геометрически сложение комплексных чисел осуществляется по «правилу параллелограмма» (рис. 3), а умножению на действительное число k соответствует гомотетия с центром O и коэффициентом k .

Умножение произвольных комплексных чисел основано на тождестве

$$i^2 = -1.$$

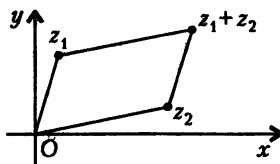


Рис. 3

Пользуясь им, получаем

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Можно определить и деление комплексных чисел – как действие, обратное умножению. Выражение z_1/z_2 имеет однозначный смысл всегда, когда $z_2 \neq 0$, и определяется

формулой

$$\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

В частности,

$$\frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

Комплексное число $\bar{z} = x - iy$ называется сопряженным к числу $z = x + iy$. Очевидно, каждое комплексное число сопряжено к своему сопряженному: $\bar{\bar{z}} = z$, а точки \bar{z} и z симметричны друг другу относительно действительной оси.

С комплексными числами можно делать все четыре действия арифметики, причем верны те алгебраические соотношения, которые позволяют выполнять привычные преобразования (перенос членов из одной части равенства в другую, приведение подобных членов, вынесение за скобки). На языке математики это означает, что комплексные числа образуют поле.

Упражнения

1. Выполните действия

а) $(1+i)(1-i)$; б) $(1+i)/(1-i)$; в) $(1+i)^4 - (1-i)^4$.

2. Для каждого целого n укажите, чему равны а) i^n ; б) $(1+i)^n$.

3. Рассмотрим геометрическое преобразование комплексной плоскости, переводящее каждую точку z в точку $1/z$. а) Во что это преобразование переводит прямую $\{1+iy\}$? б) Докажите, что это преобразование переводит окружность, проходящую через точку O , в прямую, а окружность, не проходящую через точку O , в окружность.

Решение уравнений

Исторически комплексные числа возникли в математике благодаря стремлению сделать более стройной теорию решения алгебраических уравнений, т.е. уравнений вида

$$P(z) = 0, \quad (1)$$

где $P(z)$ — алгебраический многочлен n -й степени:

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0. \quad (2)$$

Корнем уравнения (1) или, что то же самое, многочлена (2), называется такое значение z , при котором (1) истинно. Решить уравнение — значит найти все его корни.

Для того чтобы найти все корни многочлена, неплохо было бы знать заранее, сколько их. Путем построения подходящей систе-

мы определений математикам удалось создать ситуацию, в которой число корней многочлена всегда равно его степени. Покажем на примере квадратных уравнений, как им это удалось. Рассмотрим приведенное квадратное уравнение с действительными коэффициентами

$$z^2 + pz + q = 0. \quad (3)$$

Как известно, его корни выражаются формулой

$$z_{1,2} = \frac{-p \pm i\sqrt{D}}{2}, \quad (4)$$

где дискриминант $D = p^2 - 4q$. Но, пока мы работаем только с действительными числами, эта формула теряет смысл при $D < 0$, и наше уравнение не имеет корней. Получается разнбой: некоторые квадратные уравнения имеют два корня, некоторые — ни одного. Этот разнбой издавна вызывал у математиков чувство неудовлетворенности, приведшее к развитию теории комплексных чисел. В поле комплексных чисел формула (4) имеет смысл и при $D < 0$, принимая вид

$$z_{1,2} = \frac{-p \pm i\sqrt{-D}}{2}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (3), легко убедиться, что получается истинное равенство.

Правда, остается еще случай, когда $D = 0$: в этом случае существует только один корень $z_1 = z_2$. Но мы будем считать, что этот корень двукратный, потому что и в этом случае, как и во всех прочих, наш квадратный трехчлен разлагается на множители

$$z^2 + pz + q = (z - z_1)(z - z_2).$$

Более громоздкое, но, в сущности, не такое уж трудное, рассуждение показывает, что и при произвольных комплексных значениях коэффициентов p и q уравнение (3) тоже имеет два комплексных корня.

Итак, вводя подходящие определения, мы приплы к ситуации, в которой у всякого квадратного уравнения есть два корня. Аналогичное верно и для всех степеней.

Основное утверждение, к которому мы стремимся прийти в этой статье, состоит в следующем. Всякий многочлен n -й степени (2) разлагается в поле комплексных чисел на n множителей

$$p(x) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n), \quad (5)$$

где z_1, z_2, \dots, z_n — все корни нашего многочлена (некоторые из

них могут совпадать друг с другом). При этом коэффициенты многочлена (2) могут быть комплексными.

Во всяком деле труднее всего первый шаг. Так и здесь: труднее всего доказать, что всякий многочлен степени $n \geq 1$ имеет хотя бы один комплексный корень. Это последнее утверждение (может быть, именно потому, что в нем главная трудность) и называется обычно *основной теоремой алгебры*.

Обратим внимание на один частный случай, когда утверждение основной теоремы алгебры сравнительно очевидно. Пусть все коэффициенты многочлена (2) — действительные числа и n нечетно. В этом случае многочлен заведомо имеет хотя бы один действительный корень. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим график $P(x)$, где x пробегает действительную числовую ось, а именно — поведение этого графика при x , удаляющемся по оси в бесконечность влево и вправо. При больших по модулю значениях x поведение многочлена определяется поведением его старшего члена x^n , по сравнению с которым сумма всех остальных членов — мелочь, которой можно пренебречь. Вместе с x^n наш многочлен уходит в «плюс бесконечность» при $x \rightarrow +\infty$ и в «минус бесконечность» — при $x \rightarrow -\infty$. Поэтому $P(x)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения. Но график многочлена — непрерывная кривая, и раз эта кривая в одном месте расположена выше оси абсцисс, а в другом месте — ниже, то она должна хоть раз пересечь эту ось. Разумеется, это рассуждение нестрогое, но, прежде чем учиться рассуждать строго, имеет смысл ознакомиться с теми идеями, ради которых стоит строить сложный аппарат строгих рассуждений.

Чуть позже мы дадим столь же нестрогое доказательство основной теоремы алгебры. Но сначала обсудим геометрический смысл умножения комплексных чисел.

Упражнения

4. Решите уравнения

а) $z^2 + iz = 0$; б) $z^2 + i = 0$; в) $z + \frac{1}{z} = 1$.

5. Докажите, что если все коэффициенты уравнения — действительные числа, то множество его корней на комплексной плоскости симметрично относительно действительной оси. Отсюда еще раз выведите, что уравнение нечетной степени с действительными коэффициентами имеет хотя бы один действительный корень.

6. Для произвольного комплексного числа $p + iq$ решите уравнение

$$z^2 = p + iq.$$

7. Докажите теорему Виета

$$z_1 + z_2 = -p, \quad z_1 z_2 = q,$$

где z_1 и z_2 — корни уравнения (3), p и q — любые комплексные числа.

8. Решите в комплексных числах уравнения и покажите их корни на комплексной плоскости:

а) $z^4 - 1 = 0$; б) $z^3 - 1 = 0$; в) $z^6 - 1 = 0$.

При перемножении нескольких комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются

Как известно, модуль действительного числа равен расстоянию от точки x до точки O на числовой оси. Аналогично, модуль комплексного числа — это расстояние от соответствующей точки до точки O на комплексной плоскости. Из теоремы Пифагора можно вывести следующую формулу:

$$|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Модуль разности двух комплексных чисел равен расстоянию между изображающими их точками на комплексной плоскости.

Докажем, что модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению их модулей:

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$$

Пусть

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} |z_1 z_2| &= \sqrt{(x_1 x_2 - y_1 y_2)^2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)^2} = \\ &= \sqrt{x_1^2 x_2^2 + y_1^2 y_2^2 + x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2} = \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)} = |z_1| \cdot |z_2|, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Теперь нам надо ввести величину, характеризующую «направление» комплексного числа. Назовем аргументом $\text{Arg}(z)$ комплексного числа z тот угол, на который луч Oz повернут относительно положительной полуоси Ox . Поворот против часовой стрелки считается положительным, поворот по часовой стрелке — отрицательным. Только у нуля нет аргумента. У всякого же комплексного числа $z \neq 0$ есть аргумент, определенный с точностью до слагаемого $360^\circ n$, где n — любое целое число.

Например,

$$\text{Arg}(1) = 360^\circ n,$$

$$\text{Arg}(i) = 90^\circ + 360^\circ n,$$

$$\text{Arg}(-1) = 180^\circ + 360^\circ n,$$

$$\text{Arg}(-i) = 270^\circ + 360^\circ n.$$

Впрочем, все эти формулы можно писать и в ином виде, например

$$\text{Arg}(-i) = -90^\circ + 360^\circ n.$$

Выберем комплексное число z_0 , модуль которого равен единице, и покажем, что умножение всех комплексных чисел на z_0 есть поворот комплексной плоскости вокруг точки O на аргумент z_0 .

Прежде чем читать дальше, рассмотрите геометрический смысл умножения на z_0 в четырех частных случаях:

$$z_0 = \pm 1 \text{ и } z_0 = \pm i.$$

Во всех четырех случаях получается поворот вокруг точки O на некоторый угол, не правда ли?

Итак, рассмотрим умножение на произвольное число z_0 , модуль которого равен единице. Выше мы говорили, что расстояние между точками z_1 и z_2 — это модуль разности чисел z_1 и z_2 . Пользуясь этим, покажем, что при умножении на z_0 расстояние между точками сохраняется:

$$|z_1 z_0 - z_2 z_0| = |(z_1 - z_2) z_0| = |z_1 - z_2| \cdot |z_0| = |z_1 - z_2|.$$

Всякое геометрическое преобразование, при котором расстояние между точками не меняется, называется движением (к нему близко понятие твердого тела в физике). В данном случае движение оставляет на месте точку O и не оставляет на месте никакую другую точку, а такое движение есть поворот вокруг точки на некоторый угол. На какой угол? На тот самый угол, на который луч Oz_0 повернут относительно положительной полуоси Ox , т.е. на $\text{Arg } z_0$.

Теперь разберемся в том, что происходит с комплексными числами при умножении их на произвольное число z_0 , отличное от нуля. Для этого разложим z_0 на два множителя, один из которых действительный и равен $|z_0|$, а другой имеет модуль 1 и равен $z_0/|z_0|$. Умножение на первый множитель — гомотетия, при

которой аргумент не меняется, а модуль умножается на $|z_0|$. Умножение на второй множитель – поворот, при котором модуль не меняется, а аргумент увеличивается на $\text{Arg}(z_0)$.

Вот мы и доказали, что при перемножении двух произвольных комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются. Опираясь на это, легко доказать аналогичное утверждение и для любого числа сомножителей.

Важный частный случай: если комплексное число возводится в n -ю степень, то его модуль возводится в n -ю степень, а аргумент умножается на n . Формула, выражающая это утверждение, называется *формулой Муавра*. Благодаря этому факту мы можем понять, как расположены на комплексной плоскости корни уравнения

$$z^n - 1 = 0. \quad (6)$$

Эти корни – вершины правильного n -угольника с центром в точке O , одна из вершин которого – точка 1. Решая уравнения (6) алгебраически (если это удастся сделать), мы получаем выражения для тригонометрических функций углов вида $k \cdot 360^\circ/n$.

Упражнения

9. Докажите, что три различные точки z_1 , z_2 и z_3 лежат на одной прямой, если и только если

$$(z_3 - z_1)/(z_2 - z_1)$$

– действительное число.

10. Докажите, что треугольник $z_1 z_2 z_3$ подобен треугольнику $z'_1 z'_2 z'_3$, если и только если

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{z'_3 - z'_1}{z'_2 - z'_1}.$$

11. Докажите, что точки z_1 , z_2 и z_3 являются вершинами правильного треугольника с центром O , если и только если

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = 0, \\ |z_1| = |z_2| = |z_3| > 0. \end{cases}$$

12. Какую геометрическую фигуру на комплексной плоскости образуют решения уравнения

$$3|z| = 2|z - 5|?$$

13. Решите уравнение

$$z^5 - 1 = 0$$

двумя различными способами: с помощью формулы Муавра и без нее. Опираясь на полученные данные, вычислите синусы и косинусы углов в 72° и 144° . Опишите способ построения правильного пятиугольника циркулем и линейкой.

14. Пусть требуется вычислить сумму

$$\sin \alpha + \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha + 2\beta) + \dots + \sin(\alpha + n\beta).$$

С помощью комплексных чисел сведите эту задачу к вычислению суммы геометрической прогрессии.

Дама выходит из дома

Вспомните, как в конце второго раздела статьи нам помогло то, что мы рассматривали большие по модулю значения переменных. Так мы поступим и сейчас, с той, однако, разницей, что теперь у нас не действительные, а комплексные числа. Зафиксируем большой радиус R и предположим, что комплексное число z обходит окружность радиусом R с центром O . Пусть z

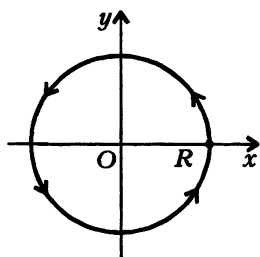


Рис. 4

начинает свой путь в точке R (т.е. в точке с координатами $(R, 0)$), движется по окружности в положительном направлении (против часовой стрелки) и заканчивает свой путь в той же самой точке R (рис.4).

Точка z^n при этом движется по окружности радиусом R^n (так как модуль числа z^n есть n -я степень модуля z), но обходит ее не один, а n раз (так как аргумент z^n равен аргументу z , умноженному на n). Поскольку точка z^n

ведет себя так хорошо и чинно, мы ее назовем Дамой. Дама выходит из своего дома, расположенного в точке R^n , совершает моцион, обходя n раз окружность радиусом R^n с центром O , и возвращается домой.

Многочлену $P(z)$ (см. формулу (2)) отводится в этом рассказе роль Собачки, потому что его путь проследить гораздо сложнее. Во всяком случае, мы знаем, что $P(z)$ тоже непрерывно движется по комплексной плоскости, начиная и заканчивая свой путь в точке $P(R)$ — в конуре.

Оценим расстояние между Дамой и Собачкой:

$$\begin{aligned} |P(z) - z^n| &= |a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \dots + a_1z + a_0| \leq \\ &\leq |a_{n-1}z^{n-1}| + |a_{n-2}z^{n-2}| + \dots + |a_1z| + |a_0| = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= |a_{n-1}| \cdot R^{n-1} + |a_{n-2}| \cdot R^{n-2} + \dots + |a_1| \cdot R + |a_0| \leq \\
&\leq (|a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \dots + |a_1| + |a_0|) R^{n-1} = L.
\end{aligned}$$

Мы воспользовались тем, что модуль суммы комплексных чисел не больше, чем сумма их модулей. Геометрически это очевидно: длина ломаной, составленной из векторов, отвечающих этим числам, не меньше расстояния между её концами. Кроме того, в последнем неравенстве мы предположили, что $R \geq 1$; это неудивительно, так как мы уже говорили, что R — большое число. L — это длина поводка, на котором Дама держит Собачку: при каждом значении z Собачка не может удалиться от Дамы на расстояние, большее L . Теперь мы можем придать точный смысл словам « R — большое число», а именно придадим R значение

$$R_0 = |a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \dots + |a_1| + |a_0| + 1.$$

Ясно, что при этом значении R длина поводка L меньше радиуса R^n того круга, по которому гуляет Дама. Отсюда следует, что на своем пути собачка, как и Дама, n раз обходит вокруг точки O .

Чтобы пояснить это важное соображение, для наглядности предположим, что к ошейнику Собачки подвешен клубок нити, конец которой закреплен в конуре. Когда Собачка совершает свой путь, клубок разматывается, и нить остается лежать на плоскости, отмечая траекторию Собачки. Концы нити совпадают. Итак, траекторию Собачки отмечает замкнутая нить, уложенная на плоскость так, что она делает n петель вокруг точки O .

А теперь внимание: наступает самый ответственный момент нашего рассуждения! Мы начинаем менять параметр R от R_0 до нуля. Будем называть этот процесс стягиванием. При стягивании радиус того круга, по которому гуляет Дама, уменьшается, но она по-прежнему проходит n кругов с центром O . Только когда R становится равным нулю, эти круги стягиваются в точку O . Как в процессе стягивания меняется траектория Собачки — это вопрос сложный, но во всяком случае ее траектория меняется непрерывно, и при $R = 0$ стягивается в точку a_0 , а при R , близком к нулю, траектория близка к точке a_0 .

Давайте исключим из рассмотрения случай $a_0 = 0$, потому что в этом случае утверждение теоремы очевидно: у нашего многочлена есть корень 0. Тогда при R близком к нулю траектория Собачки, будучи при всех z близка к $a_0 \neq 0$, не обходит вокруг точки O ни разу.

Итак, в процессе стягивания число обходов траектории Со-

бачки вокруг точки O уменьшается от n до нуля. Поскольку число это целое, оно меняется скачками, т.е. является разрывной функцией от R . Выберем какое-нибудь значение R , являющееся точкой разрыва этой функции, и подумаем о том, какова траектория Собачки при этом значении R . Ясно, что при этом значении R траектория Собачки проходит через точку O . Но каждая точка этой траектории — значение нашего многочлена. Раз хотя бы одна из этих точек совпадает с нулем, значит у многочлена есть корень!

Итак, мы доказали, что у каждого многочлена $P(z)$ ненулевой степени есть хотя бы один корень z_1 . Тогда, по теореме Безу (см. статью С.Ашманова в настоящем сборнике), данный многочлен раскладывается в произведение

$$P(z) = (z - z_1) \cdot P_1(z).$$

К $P_1(z)$ (если его степень положительна) мы можем применить то же самое рассуждение и доказать, что у него тоже есть хотя бы один корень z_2 , и, снова применив теорему Безу, получим

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdot P_2(z).$$

Повторяя это рассуждение n раз, мы наконец-то получаем разложение (3) произвольного многочлена n -й степени на n множителей, к которому все время стремились.

Упражнение 15. Пусть комплексное число z выходит из точки 1, обходит окружность радиусом 1 с центром O и возвращается в ту же точку 1. Начертите линию, по которой при этом движется точка:

- а) $1/z$; б) $z + \frac{1}{z}$; в) $z^2 + z + 1$; г) $(z - 1)^n$.

КВАТЕРНИОНЫ

А.Мищенко, Ю.Соловьев

Как сделать из точек числа?

Если речь идет о точках на прямой — это просто. Выбрав начало отсчета («ноль») и масштаб с направлением («единицу»), можно получить из прямой числовую ось и тем самым превратить каждую точку в действительное число — координату (рис.1).

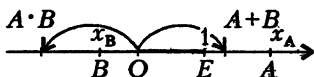


Рис. 1

С точками на плоскости сложнее. Выбрав начало отсчета («ноль») и пару перпендикулярных осей, можно сопоставить каждой точке на плоскости пару ее координат (x, y) . Чтобы каждую такую пару — *дуплет* — сделать числом, нужно научиться «складывать» и «умножать» эти дуплеты, причем так, чтобы сохранялись привычные свойства сложения и умножения (переместительный, сочетательный и распределительный законы, наличие обратных операций — деления и вычитания).

Со сложением просто. Дуплеты естественно складывать как векторы — по координатам (рис.2):

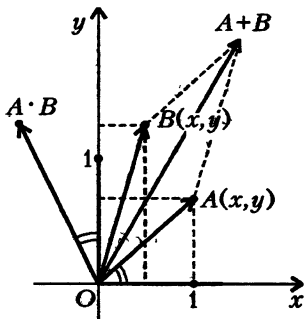


Рис. 2

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y'). \quad (1)$$

С умножением же дело обстоит хитрее¹. Однако и здесь не очень

Опубликовано в «Кванте» №9 за 1983 г.

¹ Покоординатное умножение $(x, y)(x', y') = (xx', yy')$ ничего хорошего не дает: для такой операции нет обратной операции (невозможно, к примеру, деление на ненулевой дуплет $(0; 2)$).

сложная формула дает выход из положения:

$$(x; y) \cdot (x'; y') = (x - x'; y + y'). \quad (2)$$

Нетрудно проверить, что такое умножение дуплетов вместе со сложением (1) обладают выше упомянутыми «привычными свойствами». Таким образом, множество дуплетов с операциями (1), (2) можно считать полноценным числовым множеством.

На самом деле дуплеты — не что иное, как комплексные числа. Их чаще записывают не в виде $(x; y)$, а как $x + yi$, где i — мнимая единица (дуплет $(0; 1)$), обладающая замечательным свойством $i^2 = i \cdot i = -1$, позволяющим (в области комплексных чисел) извлекать корни из отрицательных чисел. Подробнее о комплексных числах можно прочитать в статье Л.С.Понтрягина в настоящем сборнике.

А как превратить точки пространства в числа? Здесь снова, вводя систему координат, можно записывать точки в виде наборов их координат, но уже не двух, а трех: $(x; y; z)$. Такие тройки, или *триплеты*, естественно складывать покоординатно:

$$(x; y; z) + (x'; y'; z') = (x + x'; y + y'; z + z'). \quad (3)$$

Триплеты можно будет считать числами, если найдется способ их умножения, обладающий, вместе со сложением (3), обычными свойствами этих операций. В частности, обратной к умножению операцией (делением на ненулевые элементы).

Так все-таки, как умножаются триплеты? В 1833 г. этой задачей заинтересовался ирландский математик Уильям Роуан Гамильтон (1805—1865). Но об этом незаурядном человеке стоит рассказать особо.

У.Р.Гамильтон

Гамильтон обладал блестящими и многосторонними способностями. В десять лет он знал наизусть много стихов Гомера, в четырнадцать лет владел девятью языками, в 1824 г. опубликовал в трудах Королевской Ирландской Академии работу, посвященную геометрической оптике, в 1827 г. получил звание королевского астронома Ирландии.

К 1833 г. Гамильтон занимал пост директора обсерватории в Денсинке (около Дублина) и был известен как автор ряда работ по оптике и аналитической механике. Исходя из своих работ по геометрической оптике, Гамильтон предсказал эффект двойной конической рефракции в двуосных кристаллах, который вскоре был обнаружен его коллегой Ллойдом.

В течение долгих десяти лет Гамильтон безуспешно пытался придумать правило умножения триплетов. Позже в письме к сыну он вспоминал: «Каждое утро..., когда я спускался к завтраку, ты и твой брат Уильям Эдвин обычно спрашивали меня: «Ну как, папа, ты уже умножаешь триплеты?» На что я всегда был вынужден печально отвечать: «Нет, я умею лишь складывать и вычитать их.»

Векторное произведение

Задача, которую решал Гамильтон, поначалу казалась несложной. Как складывать векторы — ясно (по формуле (3)), остается «только» найти формулу их умножения — что-нибудь вроде формулы (2) для умножения дублетов. Но все формулы, которые перепробовал Гамильтон, упорно не подходили — то нарушалось одно из обычных свойств, то другое.

Уже тогда была хорошо известна операция векторного произведения: *векторным произведением* $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ ненулевых векторов $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ называется вектор, перпендикулярный плоскости, проходящей через векторы $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, имеющий направление, определяемое правилом правой руки» (рис.3), и длину $|\mathbf{v}_1| \cdot |\mathbf{v}_2| \cdot \sin(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$. Для дальнейшего заметим, что если векторы $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ заданы своими координатами в прямоугольной системе координат:

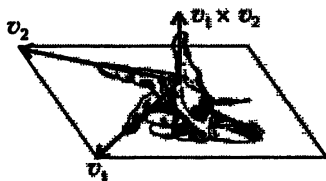


Рис. 3

$$\mathbf{v}_1 = (\alpha_1; \beta_1; \gamma_1), \quad \mathbf{v}_2 = (\alpha_2; \beta_2; \gamma_2),$$

то

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = (\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1; \gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1; \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1). \quad (4)$$

Но операция векторного произведения не годилась Гамильтону, поскольку она не имеет обратной. Например, если $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 \neq 0$, то угол $(\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2)$ между этими векторами равен нулю. Значит, длина векторного произведения $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ равна нулю, т.е. и сам вектор \mathbf{v}_3 нулевой. Если бы операция деления на ненулевой вектор существовала всегда, то мы имели бы $(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) : \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \neq 0$, в то время как $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = 0$ и, значит, $(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) : \mathbf{v}_2 \neq 0$. Получившееся противоречие показывает, что деление на \mathbf{v}_2 невозможно.

Не может не вызвать уважения и восхищения то, что, несмотря на разочарование и неудачи, Гамильтон не оставлял

надежды и в течение десяти лет с завидным упорством пытался решить поставленную перед собой задачу. И хотя задача так и не была решена (и не могла быть решена – почему, мы объясним позже), десятилетний труд не пропал даром. В один прекрасный день 1843 года Гамильтон вдруг решил для определения умножения рассматривать не триплеты (тройки чисел), а четверки, или, как он их тут же окрестил, кватернионы. Вот как это произошло.

Случай на Бромеском мосту

В одном из писем к своему сыну, написанном в свойственном тому времени несколько высокопарном стиле, Гамильтон вспоминал: «Это был 16-й день октября, который случился в понедельник, в день заседания Совета Королевской Ирландской Академии, где я должен был председательствовать. Я направлялся туда с твоей матерью вдоль Королевского канала; и, хотя она говорила мне какие-то отдельные фразы, я их почти не воспринимал, так как в моем сознании подспудно что-то творилось. Неожиданно как будто бы замкнулся электрический контур; блеснула искра, предвещающая многие длинные годы определенно направленной мысли и труда, моего – если доведется, или труда других, если мне будет даровано достаточно сознательной жизни, чтобы сообщить о своем открытии. Я оказался не в состоянии удержаться от желания высечь ножом на мягком камне Бромеского моста фундаментальную формулу о символах i, j, k ,

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1,$$

содержащую решение проблемы, но, конечно, эта запись с тех пор стерлась. Однако более прочное упоминание осталось в Книге записей Совета Академии за этот день, где засвидетельствовано, что я попросил и получил разрешение на доклад о кватернионах на первом заседании сессии, который и был прочитан соответственно в понедельник 13-го следующего месяца – ноября».

Определение кватернионов

Кватернионы – это четверки действительных чисел (x, y, u, v) , которые удобно записывать в виде

$$q = x + yi + uj + vk,$$

где i, j, k – новые числа, являющиеся аналогом мнимой единицы

в комплексных числах. Требуется, чтобы числа i, j, k удовлетворяли следующим соотношениям:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad (5)$$

$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i,$$

$$ki = -ik = j, \quad (6)$$

\times	i	j	k
i	-1	k	j
j	$-k$	-1	i
k	$-j$	$-i$	-1

которые удобно записать в виде «таблицы умножения» (рис.4).

Рис. 4

По определению операции сложения и умножения кватернионов производятся по обычным правилам раскрытия скобок и приведения подобных членов с учетом правил (5) – (6).

Согласно этому определению, если q_1 и q_2 – два кватерниона, то

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 &= (x_1 + y_1i + u_1j + v_1k) + (x_2 + y_2i + u_2j + v_2k) = \\ &= x_1 + y_1i + u_1j + v_1k + x_2 + y_2i + u_2j + v_2k = \\ &= (x_1 + x_2) + (y_1i + y_2i) + (u_1j + u_2j) + (v_1k + v_2k) = \\ &= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i + (u_1 + u_2)j + (v_1 + v_2)k. \quad (7) \end{aligned}$$

Это, разумеется, привычное нам «покоординатное» сложение. Далее, произведение кватернионов q_1 и q_2 вычисляется так:

$$\begin{aligned} q_1 q_2 &= (x_1 + y_1i + u_1j + v_1k)(x_2 + y_2i + u_2j + v_2k) = \\ &= x_1x_2 + x_1y_2i + x_1u_2j + x_1v_2k + y_1x_2i + y_1y_2i^2 + y_1u_2ij + y_1v_2ik + \\ &\quad + u_1x_2j + u_1y_2ji + u_1u_2j^2 + u_1v_2jk + \\ &\quad + v_1x_1k + v_1y_2ki + v_1u_2kj + v_1v_2k^2 = \\ &= x_1x_2 + x_1y_2i + x_1y_2j + x_1v_2k + y_1x_2i - y_1y_2 + y_1u_2k - y_1v_2j + \\ &\quad + u_1x_2j - u_1y_2k - u_1u_2 + u_1v_2i + v_1x_2k + v_1y_2j - v_1u_2i - v_1v_2 = \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2 - u_1u_2 - v_1v_2) + (x_1y_2 + y_1x_2 + u_1v_2 - v_1u_2)i + \\ &\quad + (x_1u_2 + u_1x_2 - y_1v_2 + v_1y_2)j + (x_1v_2 + v_1x_2 + y_1u_2 - v_1y_2)k. \quad (8) \end{aligned}$$

Длинная, но совершенно автоматическая проверка показывает, что умножение кватернионов обладает сочетательным свойством:

$$(q_1 q_2) q_3 = q_1 (q_2 q_3).$$

Естественно считать, что действительные и комплексные числа являются частным случаем кватернионов. Так, действительное число x — это кватернион вида

$$x = x + 0 \cdot i + 0 \cdot j + 0 \cdot k.$$

Комплексное число $z = x + iy$ представляется как кватернион

$$z = x + iy = x + iy + 0 \cdot j + 0 \cdot k. \quad (9)$$

Читатель, не знакомый с комплексными числами, не должен смущаться: он может считать формулу (9), вместе с формулами (7) и (8), определением комплексного числа. Ему также будет полезно написать формулу умножения (8) для случая (9) и сравнить с формулой (2).

У операции сложения кватернионов, очевидно, имеется обратная операция — вычитание. Именно, разность двух кватернионов q_1 и q_2 определяется формулой

$$q_1 - q_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i + (u_1 - u_2)j + (v_1 - v_2)k.$$

Если $q_1 = q_2$, то разность $q_1 - q_2$ — это нулевой кватернион, равный

$$q_1 - q_2 = 0 + 0 \cdot i + 0 \cdot j + 0 \cdot k = 0.$$

Деление кватернионов

Перейдем теперь к операции деления кватернионов, обратной к операции умножения. Вообще, что мы понимаем под частным от деления числа a на число $b \neq 0$? Это такое число c , что

$$bc = a. \quad (10)$$

Так определяется частное от деления для действительных и комплексных чисел. К сожалению, для кватерниона применить непосредственно это определение мы не можем. И дело здесь вот в чем. Для того чтобы формула (10) «корректно» определяла частное, нужно, чтобы произведение не зависело от порядка сомножителей. В противном случае наряду с частным $c = b^{-1}a$, определенным формулой (10), существует вполне равноправное «левое частное» c' , определяемое формулой

$$c'b = a,$$

которое может отличаться от «правого частного» c из (10). Вот здесь, кроме необходимости выйти за пределы трехмерного пространства, Гамильтону пришлось принести еще одну жертву.

Оказывается, определенные им новые числа – кватернионы – потеряли еще одно привычное качество: произведение кватернионов зависит от порядка сомножителей. Действительно, уже в формулах (6) при изменении порядка множителей произведение меняет знак.

Таким образом, можно говорить лишь о «делении слева» и «делении справа». Как реально найти, скажем, «левое частное» от деления кватерниона q_1 на кватернион $q_2 \neq 0$?

Обозначим искомое частное через $q = x + yi + uj + vk$. Тогда, используя правило умножения для кватернионов и определение левого частного, получим следующее равенство кватернионов:

$$qq_2 = q_1$$

или

$$\begin{aligned} (xx_2 - yy_2 - uu_2 - vv_2) + (xy_2 + yx_2 + uv_2 - vu_2)i + \\ + (xu_2 + ux_2 - yv_2 + vy_2)j + (xv_2 + vx_2 + yu_2 - uy_2)k = \\ = x_1 + y_1i + u_1j + v_1k. \end{aligned}$$

Полученное равенство равносильно системе четырех линейных уравнений с переменными x, y, u, v :

$$x_2x - y_2y - u_2u - v_2v = x_1,$$

$$y_2x + x_2y + v_2u - u_2v = y_1,$$

$$u_2x + v_2y + x_2u - y_2v = u_1,$$

$$v_2x + u_2y - y_2u + x_2v = v_1.$$

Предлагаем читателю в качестве упражнения решить эту систему и тем самым найти «левое частное» от деления q_1 на q_2 . Аналогичным образом находится «правое частное» от деления q_1 на q_2 .

Рассмотрим частный случай, когда делимое q_1 равно действительному числу 1. В этом случае частное от деления $q_1 = 1$ на кватернион q_2 (и «слева» и «справа») равно одному и тому же кватерниону

$$p = \frac{x_2 - y_2i - u_2j - v_2k}{x_2^2 + y_2^2 + u_2^2 + v_2^2}$$

(докажите!). Поэтому кватернион q обозначается через

$$q^{-1} = \frac{x_2 - y_2 i - u_2 j - v_2 k}{x_2^2 + y_2^2 + u_2^2 + v_2^2}.$$

Тогда «правое частное» от деления кватерниона q_1 на ненулевой кватернион q_2 выражается формулой

$$q = q_2^{-1} \cdot q_1,$$

а «левое частное» от деления кватерниона q_1 на q_2 — формулой

$$q = q_1 \cdot q_2^{-1}.$$

Практически частное от деления двух кватернионов ищется другим путем. Для этого нам потребуются

Скалярные и векторные кватернионы

Так же как комплексные числа разлагаются в сумму своей действительной и мнимой частей, кватернион

$$q = x + yi + uj + vk$$

тоже можно разложить в сумму

$$q = x + (yi + uj + vk).$$

Первое слагаемое в этом разложении называется *скалярной частью* кватерниона, а второе слагаемое — *векторной частью*. Скалярная часть x — это просто действительное число, а векторная часть $yi + uj + vk$ может быть изображена вектором

$$r = yi + uj + vk$$

в трехмерном пространстве, где i, j, k мы теперь рассматриваем как единичные векторы прямоугольной системы координат (рис.5).

Таким образом, каждый кватернион q представляется в виде суммы

$$q = x + r,$$

где x — скалярная часть кватерниона q , а r — векторная часть. Если $r = 0$, то $q = x$ и кватернион q называется *скалярным кватернионом*. Если же $x = 0$, то $q = r$ и q называется *векторным кватернионом*.

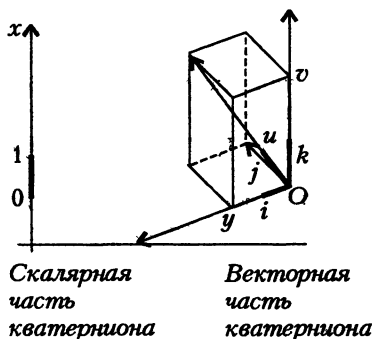


Рис. 5

При сложении кватернионов независимо складываются их скалярные и векторные части.

При умножении кватернионов дело обстоит сложнее. Если q_1 и q_2 — скалярные кватернионы, то их произведение $q_1 q_2$ тоже скалярный кватернион. В случае, когда $q_1 = x$ — скалярный кватернион, а $q_2 = r$ — векторный кватернион, произведение

$$q_1 q_2 = x \cdot (yi + uj + vk) = (xy)i + (xu)j + (xv)k$$

является векторным кватернионом и операция умножения совпадает с умножением вектора r в пространстве на действительное число x .

И наконец, если оба кватерниона векторные:

$$q_1 = r_1 = y_1 i + u_1 j + v_1 k$$

$$q_2 = r_2 = y_2 i + u_2 j + v_2 k,$$

то

$$q_1 q_2 = -(y_1 y_2 + u_1 u_2 + v_1 v_2) + (u_1 v_2 - v_1 u_2) i + \\ + (v_1 y_2 - y_2 v_2) j + (y_1 u_2 - u_1 y_2) k.$$

Как видно из последней формулы, скалярная часть произведения $q_1 q_2$ равна скалярному произведению (r_1, r_2) векторов r_1 и r_2 с обратным знаком. Векторная же часть $q_1 q_2$ — это наш старый знакомый — векторное произведение $r_1 \times r_2$, записанное в координатах (см. (4)).

Объединяя все рассмотренные случаи, получим общую формулу для умножения кватернионов. Если $q_1 = x_1 + r_1$ и $q_2 = x_2 + r_2$, то

$$q_1 q_2 = (x_1 x_2 - r_1 \cdot r_2) + (x_1 r_2 + x_2 r_1 + r_1 \times r_2).$$

А как же триплеты?

Почему Гамильтону все-таки не удалось найти удовлетворительного способа для умножения триплетов? Не из-за недостаточного остроумия или трудолюбия — выше мы уже отмечали, что задачу построения «трехмерных чисел» решить нельзя. Действительно, доказано, что попросту не существует способа умножения точек пространства, удовлетворяющего нашим требованиям (ассоциативности, дистрибутивности относительно покомпонентного сложения, возможности деления на ненулевые элементы). Более того, сейчас известны все случаи, когда можно ввести такое умножение. Как доказал немецкий математик Ф.Г.Фробе-

ниус (1849—1917), этих случаев три: в размерности один (обычные действительные числа), в размерности два (комплексные числа) и в «размерности четыре» (кватернионы).

Что было дальше

Гамильтон и его последователи возлагали большие надежды на кватернионы. От кватернионов ожидали таких же результатов, как от комплексных чисел, и даже больше. И действительно, с помощью исчисления кватернионов были обнаружены совершенные в их математической красоте формулы, описывающие ряд важных физических явлений. Но дальнейшие надежды на развитие алгебраического и функционального исчисления кватернионов не оправдались.

Для кватернионов не имеет места основная теорема алгебры о существовании корней у многочлена с кватернионными коэффициентами, а, с другой стороны, существует такой многочлен с кватернионными коэффициентами от одной переменной, для которого любой кватернион является корнем.

Оптимизм сменился скепсисом. В начале нашего века математики перестали интересоваться кватернионами. Но время шло, и физики упорно искали математический формализм для некоторых эффектов, связанных с так называемым *спином* элементарных частиц. Кватернионы снова получили признание, когда была понята их роль в построении различных геометрических преобразований пространства, используемых в квантовой физике. Геометрические свойства кватернионов — это особая большая тема, о которой мы надеемся рассказать в дальнейшем.

ФОРМУЛА СУЩЕСТВУЕТ, НО...

И. Клумова, Д. Фукс

Вряд ли можно найти школьника, который никогда бы не слышал о том, что наряду с формулой для решения квадратных уравнений есть формула для решения кубических уравнений. Обычный запас сведений об этой формуле сводится к тому, что она имеется, но настолько громоздка, что знать ее совершенно не нужно. Во всяком случае, в школьных учебниках этой формулы нет.

Однако иной школьник, сталкиваясь с задачами, которые сводятся к кубическим уравнениям, начинает сомневаться в полной бесполезности такой формулы, сколь бы сложна она ни была. Окружающая эту формулу таинственность подогревает его любопытство — и он принимается искать ее в разных книгах и справочниках.

Там он находит примерно следующее.

Как выглядит формула?

Кубическим уравнением называется уравнение вида

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0. \quad (1)$$

Для его решения мы прежде всего заметим, что простым преобразованием можно уничтожить член с x^2 . Для этого достаточно положить $x = y - \frac{a}{3}$. Тогда

$$\begin{aligned} x^3 + ax^2 + bx + c &= \left(y - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(y - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(y - \frac{a}{3}\right) + c = \\ &= y^3 - ay^2 + \frac{a^2}{3}y - \frac{a^3}{27} + ay^2 - \frac{2}{3}a^2y + \frac{a^3}{9} + by - \frac{ab}{3} + c = \\ &= y^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)y + \left(c - \frac{ab}{3} + \frac{2a^3}{27}\right) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, всякое кубическое уравнение сводится к уравнению без квадратичного члена, или, короче, к уравнению вида

$$x^3 + px + q = 0. \quad (2)$$

А такое уравнение решается по формуле

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \quad (3)$$

И дальше идет то, что в школе называют «выводом формулы» — полстранички выкладок.

Что-то в этой формуле неблагополучно

Оставим пока «вывод» в стороне и попробуем применить эту формулу к решению конкретных уравнений.

Первый пример. $x^3 + 6x - 2 = 0$.

Здесь $p = 6$ и $q = -2$. Наша формула дает

$$x = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}.$$

В школе нас приучили, что все корни должны извлекаться, и полученный ответ может показаться вам недостаточно красивым. Но согласитесь, что никакой подбор не помог бы вам узнать, что эта разность двух кубических корней является решением такого простого уравнения. Так что этот результат можно записать нашей формуле в актив.

Второй пример. $x^3 + 3x - 4 = 0$.

Формула (3) дает:

$$x\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}.$$

Ответ более громоздок. Это число можно найти приближенно с помощью таблиц, и чем точнее будут таблицы, тем ближе будет результат к единице. Причина проста: это число равно единице¹. Но из формулы этого не видно, и это, пожалуй, недостаток формулы: ведь решая квадратные уравнения с целыми коэффициентами, мы сразу видим, является ли решение рациональным.

Третий пример. $(x+1)(x+2)(x-3) = 0$.

Сразу видно, что это уравнение имеет три решения: -1 , -2 и 3 . Но попробуем решить его по формуле. Раскрываем скобки:

$$x^3 - 7x - 6 = 0$$

¹ Доказательство: единица есть, очевидно, корень нашего уравнения, а наше уравнение имеет только одно решение — см. ниже.

и применяем формулу (3):

$$x = \sqrt[3]{3 + \sqrt{-\frac{100}{27}}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt{-\frac{100}{27}}}.$$

Под знаком квадратного корня стоит отрицательное число. Сталкиваясь с подобной ситуацией при решении квадратных уравнений, мы делаем вывод, что уравнение не имеет решений («уравнение не имеет действительных решений», — скажут более образованные; но образованность в данном случае мало помогает). Однако, мы знаем, что уравнение решения имеет, даже целых три. Формула наша в данном случае просто провалилась.

Эти и другие подобные примеры наводят на мысль, что причина непопулярности формулы (3) лежит не в ее громоздкости (не так уж она и громоздка!), а в ее ненадежности: то она вовсе не дает решений, то дает их в неудовлетворительной форме.

Такое заключение, в общем, справедливо.

Попытаемся все же разобраться, что дает и чего не дает наша формула. Начнем с самого простого.

Теорема

Если выражение $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ неотрицательно, то правая часть формулы (3) является решением уравнения (2).

Доказательство. Положим

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

$$\beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Очевидно, правая часть формулы (3) как раз равняется сумме $\alpha + \beta$. А произведение $\alpha\beta$ равно $-\frac{p}{3}$:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} &= \\ &= \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)} = \sqrt[3]{-\frac{p^3}{27}} = -\frac{p}{3}. \end{aligned}$$

Теперь подставим $\alpha + \beta$ в левую часть уравнения (2):

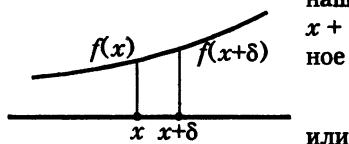
$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)^3 + p(\alpha + \beta) + q &= \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 + p(\alpha + \beta) + q = \\ &= \alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta(\alpha + \beta) + p(\alpha + \beta) + q = \\ &= -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} - \frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} - p(\alpha + \beta) + p(\alpha + \beta) + q = 0. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Сколько решений имеет уравнение (2)?

Это естественный вопрос: ведь решить уравнение – значит найти все его решения, а для этого полезно знать, сколько оно имеет решений.

Выясним сначала, при каких x функция $y = x^3 + px + q$ возрастает, а при каких – убывает². Для этого сравним значения нашей функции в точке x и в точке $x + \delta$, где δ – маленькое положительное число (см. рис.1). Что больше:



$$x^3 + px + q$$

или

Рис. 1

$$(x + \delta)^3 + p(x + \delta) + q?$$

Вычисляем разность:

$$(x + \delta)^3 + p(x + \delta) + q - (x^3 + px + q) = \delta(3x^2 + 3\delta x + \delta^2).$$

Знак этой разности определяется знаком сомножителя $3x^2 + p + 3\delta x + \delta^2$ (поскольку $\delta > 0$). Что же касается этой суммы, то

1) если $3x^2 + p > 0$, то при достаточно малом δ она положительна;

2) если $3x^2 + p < 0$, то при достаточно малом δ она отрицательна.

Таким образом,

1) если $3x^2 + p > 0$, то функция $y = x^3 + px + q$ в достаточно небольшой окрестности точки x возрастает;

2) если $3x^2 + p < 0$, то убывает.

²То, что делается дальше, представляет собой очень распространенный в математике прием, называемый *дифференцированием*. Конечно, многие читатели знакомы с этим приемом, но мы постарались сделать изложение понятным и для тех, кто его не знает.

Далее, хорошо известно, что

- 1) если $p > 0$, то $3x^2 + p > 0$ при всех x ;
- 2) если $p < 0$, то $3x^2 + p > 0$ при $x > \sqrt{-p/3}$ и при $x < -\sqrt{-p/3}$, и $3x^2 + p < 0$ при $-\sqrt{-p/3} < x < \sqrt{-p/3}$.

Поэтому

- 1) если $p > 0$, то функция $y = x^3 + px + q$ возрастает при всех x ;
- 2) если $p < 0$, то функция $y = x^3 + px + q$ возрастает при $x < -\sqrt{-p/3}$, убывает при $-\sqrt{-p/3} < x < \sqrt{-p/3}$ и снова возрастает при $x > \sqrt{-p/3}$.

Заметим, что при достаточно большом x выражение $x^3 + px + q$ заведомо положительно, а при достаточно большом по модулю отрицательном x оно заведомо отрицательно. Теперь мы можем схематически нарисовать график функции $y = x^3 + px + q$ (рис.2, а-в).

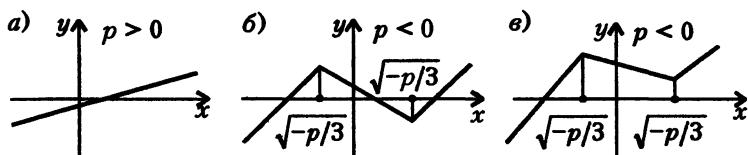


Рис. 2

На этих схематических графиках отражены только зоны возрастания и убывания функции $y = x^3 + px + q$ и еще тот факт, что $y > 0$ при достаточно больших x и $y < 0$ при отрицательных достаточно больших по модулю x . Но уже этих схематических графиков достаточно, чтобы судить о числе решений уравнения. Мы видим, что

1) уравнение имеет одно решение, если $p > 0$; или если $p < 0$ и значения функции в точках $-\sqrt{-p/3}$, $\sqrt{-p/3}$ имеют одинаковые знаки — рис.2, а и 2, в;

2) если же $p < 0$ и значения функции в точках $-\sqrt{-p/3}$, $\sqrt{-p/3}$ имеют противоположные знаки, то уравнение имеет три решения — рис.2, б.

Можно сформулировать этот результат в более удобной форме. Для того чтобы узнать, одинаковые или противоположные знаки имеют значения функции в точках $-\sqrt{-p/3}$, $\sqrt{-p/3}$, можно вычислить эти значения и перемножить их: если произведение положительно, то знаки сомножителей одинаковы, а если

оно отрицательно, то — различны. Проделаем это вычисление:

$$\begin{aligned} & \left[\left(-\sqrt{-p/3} \right)^3 + p \left(-\sqrt{-p/3} \right) + q \right] \left[\left(\sqrt{-p/3} \right)^3 + p \sqrt{-p/3} + q \right] = \\ & = \left[p/3 \sqrt{-p/3} - p \sqrt{-p/3} + q \right] \left[-p/3 \sqrt{-p/3} + p \sqrt{-p/3} + q \right] = \\ & = \left(q - 2/3 p \sqrt{-p/3} \right) \left(q - 2/3 p \sqrt{-p/3} \right) = q^2 + 4/27 p^3. \end{aligned}$$

Итак, если $p < 0$ и $q^2 + \frac{4}{27} p^3 > 0$, то решение одно, а если $p < 0$ и $q^2 + \frac{4}{27} p^3 < 0$, то решений три. Заметив, что если $p > 0$, то уже заведомо $q^2 + \frac{4}{27} p^3 > 0$, мы можем сформулировать результат так.

Если $q^2 + \frac{4}{27} p^3 > 0$, то уравнение (2) имеет одно решение.

Если $q^2 + \frac{4}{27} p^3 < 0$, то уравнение (2) имеет три решения³.

Неожиданный вывод

Заметили ли вы, что у нас получилась удивительная вещь? Ведь выражение $q^2 + \frac{4}{27} p^3$ только на несущественный (с точки зрения знака) множитель отличается от опасного подкоренного выражения в формуле (3):

$$q^2 + \frac{4}{27} p^3 = 4 \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \right).$$

Значит, именно тогда, когда уравнение имеет три решения, подкоренное выражение отрицательно, и формула не дает ничего (мы видели это на примере, но теперь ясно, что это не случайно). Если же уравнение имеет всего одно решение, то наша формула его и дает.

Итак, феномен, наблюдавшийся в примерах, получил свое объяснение. Осталось посмотреть только, нельзя ли что-нибудь

³ Мы всюду оставляли без рассмотрения случай, когда что-нибудь обращается в ноль. В действительности, если $q^2 + \frac{4}{27} p^3 = 0$, то уравнение имеет два решения, за единственным исключением: если $p = q = 0$, то решение, очевидно, одно.

все же **выжать** из нашей формулы, когда уравнение имеет три решения и под квадратным корнем оказывается отрицательное число.

Не помогут ли комплексные числа?

Все, что написано дальше, рассчитано на читателя, знакомого с *комплексными числами*.

Впрочем, «знакомство» с комплексными числами, в сущности, есть не более чем привычка к употреблению определенных слов. Комплексные числа появились в математике примерно так же, как несколько раньше — отрицательные числа и дроби. Поскольку не из всякого действительного числа можно извлечь квадратный корень, удобно дополнить запас чисел новым числом i , квадрат которого равен -1 (как раньше, желая сделать универсальной операцию вычитания, ввели отрицательные числа). Вместе с i вводят числа вида $a + bi$, где a и b — действительные числа, и уславливаются, что действия над этими числами производятся по таким правилам:

$$(a + bi) + (c + di) = a + bi + c + di = (a + c) + (b + d)i,$$

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

(в последнем равенстве мы учли, что $i^2 = -1$). Построенные числа называются *комплексными числами*; числа a и b называются соответственно *действительной* и *мнимой* частью числа $a + bi$; два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их действительные части и равны их мнимые части. Приведем еще *формулу Муавра* (она нам понадобится ниже):

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) = \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta),$$

которая является немедленным следствием формулы для перемножения комплексных чисел и известных тригонометрических формул.

Вернемся к формуле (3). В случае, когда $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$, можно попытаться найти решения уравнения (2) с ее помощью, извлекая кубические корни из комплексных чисел.

Извлечь кубический корень из комплексного числа $a + bi$ — это значит решить уравнение $(x + iy)^3 = a + bi$, т.е. уравнение $x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3) = a + bi$. Последнее равенство означает, что

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = a, \\ 3x^2y - y^3 = b. \end{cases}$$

Система же эта различными способами приводится опять-таки к кубическому уравнению. Например, так:

$$y^2 = \frac{x^3 - a}{3x} \text{ (из первого уравнения),}$$

$$y \left(3x^2 - \frac{x^3 - a}{3x} \right) = b, \quad y = \frac{3bx}{8x^3 + a},$$

$$x^3 - 3x \frac{9b^2 x^2}{(8x^3 + a)^2} = a, \quad (x^3 - a)(8x^3 + a)^2 - 27b^2 x^3 = 0,$$

или, полагая $x^3 = z$,

$$(z - a)(8z + a)^2 - 27b^2 z = 0. \quad (4)$$

Конечно, можно снова обратиться к формуле (3). Но оказывается, что применение этой формулы к уравнению (4) всегда приводит к отрицательному выражению под квадратным корнем. Впрочем, это и не удивительно, поскольку, как легко доказать, *кубический корень из комплексного числа имеет три значения*.

Таким образом, на этом пути формулой (3) воспользоваться не удастся. Но все же с ее помощью можно находить приближенные значения корней уравнения (2). Для этого нужно иметь, кроме таблиц квадратных и кубических корней, еще тригонометрические таблицы и применить формулу Муавра, из которой следует, что

$$\cos \alpha + i \sin \alpha = \left(\cos \frac{\alpha}{3} + i \sin \frac{\alpha}{3} \right)^3.$$

Кубический корень из комплексного числа $a + bi$ с помощью этой формулы нужно искать так. Сначала представим $a + bi$ в виде

$$\sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} i \right).$$

Затем находим такое α , что $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ и $\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

(это можно сделать, потому что $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1$).

Искомый кубический корень запишется тогда как

$$\sqrt[3]{a^2 + b^2} \left(\cos \frac{\alpha}{3} + i \sin \frac{\alpha}{3} \right).$$

(Заметим, что α определено с точностью до слагаемого $2k\pi$, $\frac{\alpha}{3}$ определено с точностью до слагаемого $\frac{2k\pi}{3}$ и $\cos \frac{\alpha}{3} + i \sin \frac{\alpha}{3}$ имеет три значения — так и должно быть!)

Этим способом можно приближенно найти кубические корни, входящие в формулу (3). Впрочем, нам достаточно найти только действительную часть одного из них: если один из двух корней равен $c + di$, то другой равен $c - di$ (докажите это!) и их сумма равна $2c$.

Но, пожалуй, этот способ решения кубического уравнения с помощью таблиц квадратных и кубических корней и тригонометрических таблиц еще более громоздок и неточен (ведь все табличные значения определяются лишь с какой-то точностью, а при каждом арифметическом действии ошибка увеличивается), чем метод подбора и последовательных приближений, которым пользуются обычно.

Поэтому-то мы и не запоминаем формулы (3): для практического решения кубических уравнений она не приспособлена.

Заключение: зачем нужна формула (3)?

Значение формулы (3) заключается в том, что она дает ответ на классический вопрос о *«разрешимости уравнений третьей степени в радикалах»*. Поясним это.

Первые иррациональные числа, с которыми нам приходится сталкиваться, — это корни (самое первое — $\sqrt{2}$, диагональ квадрата со стороной единица). Извлечение корней, вместе с арифметическими действиями, расширяет запас чисел (присоединяя к рациональным числам такие числа, как $\sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$, $\sqrt{\sqrt{5}/(\sqrt{2} + \sqrt{3})}$ и т.п.). Хватает ли этого расширенного запаса для решения алгебраических уравнений с целыми коэффициентами? Наша формула показывает, что для решения кубических уравнений его хватает — во всяком случае, если мы допускаем в качестве подкоренных выражений не только действительные, но и комплексные числа.

Оказывается, что в радикалах решаются и уравнения четвертой степени; *уравнения же пятой степени и выше неразрешимы в радикалах*. Очень вероятно, что об этой последней теореме читатель уже слышал. Доказательство ее на самом деле гораздо проще, чем принято считать, но это — предмет для отдельного разговора.

КУБИЧЕСКАЯ ПАРАБОЛА

Л.Понтрягин

Для понимания этой статьи нужно уметь вычислять производную многочлена и знать теорему о том, что если функция $f(x)$, заданная на отрезке $\alpha_1 \leq x \leq \alpha_2$, имеет положительную производную на интервале $\alpha_1 < x < \alpha_2$, при этом быть может имеет производную равную нулю в концах отрезка, то она возрастает на всем отрезке $\alpha_1 \leq x \leq \alpha_2$. Так что для двух точек x_1, x_2 , удовлетворяющих условию

$$\alpha_1 \leq x_1 < x_2 \leq \alpha_2, \quad (1)$$

имеет место неравенство

$$f(x_1) < f(x_2). \quad (2)$$

Аналогичная теорема имеет место также и для убывания функции в случае отрицательной производной.

Кроме того, нужно знать, что такое вторая и третья производные функции $f(x)$. Вторая производная $f''(x)$ есть производная от производной функции $f'(x)$, т.е. задается формулой

$$f''(x) = (f'(x))'. \quad (3)$$

Третья производная $f'''(x)$ функции $f(x)$ есть производная от второй производной, т.е. задается формулой

$$f'''(x) = (f''(x))'. \quad (4)$$

Статья посвящена изучению графика функции

$$y = g(x) = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3. \quad (5)$$

Этот график называется *кубической параболой*.

Рассмотрим прежде всего кубическую параболу частного вида

$$y = f(x) = x^3 - px, \quad (6)$$

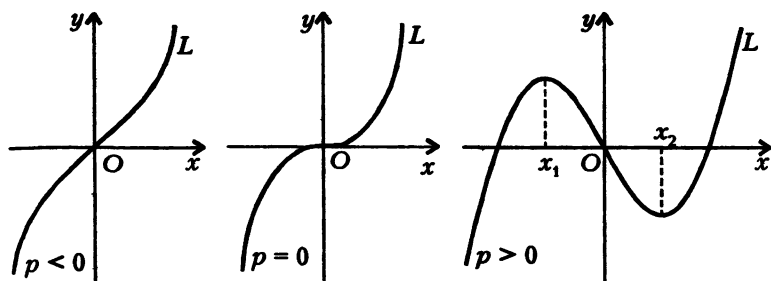


Рис. 1

где p – постоянная. График этой функции (рис.1) обозначим через L .

Отметим прежде всего совершенно специальные, но очень заметные свойства кубической параболы (6). Кубическая парабола центрально симметрична относительно начала координат. В самом деле, если точка $(x; y)$ принадлежит кубической параболе, т.е. величины x и y удовлетворяют уравнению (6), то точка $(-x; -y)$ также удовлетворяет этому уравнению. Именно, имеем

$$(-y) = (-x)^3 - p(-x). \quad (7)$$

Таким образом, наряду с точкой $(x; y)$ линии L принадлежит и симметричная к ней относительно начала координат точка $(-x; -y)$.

Найдем, далее, точки пересечения линии L с осью абсцисс, т.е. корни уравнения

$$x^3 - px = 0. \quad (8)$$

Уравнение это имеет три корня:

$$x = 0, x = \pm\sqrt{p}. \quad (9)$$

Последние два корня при $p < 0$ мнимые и потому не имеют обычного геометрического смысла. При $p > 0$ все три корня (9) различны, и, следовательно, имеются три точки пересечения линии L с осью абсцисс. При $p = 0$ три корня сливаются в один трехкратный корень $x = 0$.

Производная функции (6) задается формулой

$$f'(x) = 3x^2 - p. \quad (10)$$

Изучая знак этой функции при различных значениях x , мы можем разбить линию L на участки возрастания и убывания функции $f(x)$ и найти точки максимума и минимума. Для той и

другой цели нам следует найти корни уравнения

$$f'(x) = 3x^2 - p = 0. \quad (11)$$

При отрицательном p функция $f'(x)$ (см. (10)) положительна при любом значении x и, следовательно, функция $f(x)$ возрастает на всем протяжении изменения x : $-\infty < x < +\infty$.

При $p = 0$ функция $f'(x)$ (см. (10)) положительна при всех значениях $x \neq 0$. Таким образом, она возрастает при $-\infty < x < 0$, $0 < x < +\infty$. А так как на первом из этих участков функция $f(x)$ отрицательна, на втором положительна, то она возрастет на всем протяжении изменения от $-\infty$ до $+\infty$.

В точке $x = 0$, где $f'(x) = 0$, функция $f(x)$ также возрастает. Таким образом, при $x = 0$, где $f'(x) = 0$, функция x^3 не имеет ни максимума, ни минимума.

В случае положительного p уравнения (11) имеет два корня

$$x_1 = -\sqrt{p/3}, \quad x_2 = \sqrt{p/3}. \quad (12)$$

Следует проверить, не имеет ли функция $f(x)$ в точках x_1 и x_2 максимумов или минимумов. Те же точки x_1 и x_2 разбивают все протяжении изменения x на участки:

$$-\infty < x \leq x_1, \quad x_1 \leq x \leq x_2, \quad x_2 \leq x < +\infty. \quad (13)$$

На первом из этих участков функция $f'(x)$ положительна, на втором — отрицательна, на третьем — вновь положительна. Таким образом, функция $f(x)$ возрастает на первом участке, убывает на втором и возрастает на третьем. Отсюда же видно, что точка x_1 есть точка максимума, а точка x_2 — точка минимума. Таким образом, кубическая парабола (6) имеет три существенно различные формы в зависимости от значения p : первая $p < 0$, вторая $p = 0$, третья $p > 0$. На рисунке 1 кубическая парабола изображена во всех трех случаях.

Рассмотрим уравнение

$$x^3 - px = c. \quad (14)$$

Геометрически ясно, что при $p < 0$ это уравнение имеет лишь один действительный корень. При $p = 0$ это уравнение имеет также лишь один действительный корень, за исключением случая $c = 0$, когда имеется тройной корень $x = 0$. Если $p > 0$, уравнение (14) имеет три корня при

$$f(x_2) \leq c \leq f(x_1), \quad (15)$$

причем в крайних положениях значения c на отрезке (15)

имеется один простой и один двойной корень. Вне отрезка (15) имеется лишь один действительный корень уравнения (14).

Кубическая парабола (6) всегда проходит через начало координат. Тангенс угла наклона ее в начале координат определяется формулой

$$f'(0) = -p. \quad (16)$$

Таким образом, сама касательная имеет уравнение

$$y = k(x) = -px. \quad (17)$$

Эта касательная разбивает всю плоскость на две части: верхнюю, лежащую над ней, и нижнюю, лежащую под ней. Произвольная точка $(x^*; y^*)$ плоскости лежит над прямой (17), если

$$y^* > -px^*. \quad (18)$$

Точка $(x^*; y^*)$ лежит под прямой (17), если

$$y^* < -px^*. \quad (19)$$

Выясним, в какой из рассмотренных двух полуплоскостей лежит точка (x, y) кубической параболы, т.е. точка, удовлетворяющая уравнению (6). Для выяснения этого вопроса мы должны сравнить величину

$$x^3 - px \quad (20)$$

с величиной

$$-px. \quad (21)$$

Ясно, что при $x < 0$ величина (20) меньше величины (21), а при $x > 0$ величина (20) больше величины (21). При $x < 0$ точка (x, y) кубической параболы удовлетворяет условию (19), т.е. лежит под касательной, а при $x > 0$ эта точка удовлетворяет условию (18), т.е. лежит над касательной. Следовательно, в начале координат кубическая парабола переходит с одной стороны касательной на другую ее сторону.

Явление перехода линии с одной стороны касательной на другую вблизи точки касания имеет общий интерес. Займемся этим явлением.

Точка перегиба. Пусть L – график некоторой функции $f(x)$, a – некоторая точка линии L с абсциссой x_0 , K – касательная к L в точке a (рис.2). Если линия L переходит в точке a с одной стороны касательной на другую, то точка называется *точкой перегиба* линии L . Оказывается, что для точки перегиба выпол-

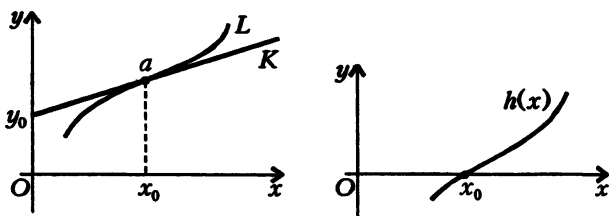


Рис. 2

нено условие (см. (3))

$$f''(x_0) = 0. \quad (22)$$

Докажем это утверждение. Уравнение касательной K мы можем записать в виде

$$y = K(x) = f'(x_0)x + y_0. \quad (23)$$

Здесь $f'(x_0)$ есть тангенс угла наклона касательной к оси абсцисс, а y_0 — некоторая константа, которая определяется условием

$$f(x_0) - K(x_0) = 0. \quad (24)$$

Это условие выражает тот факт, что касательная в точке a к линии L проходит через точку a . Рассмотрим функцию

$$h(x) = f(x) - K(x). \quad (25)$$

Эта функция удовлетворяет следующим двум условиям:

$$h(x_0) = 0, \quad h'(x_0) = 0. \quad (26)$$

Таким образом, график функции

$$y = h(x) \quad (27)$$

касается оси абсцисс в точке $x = x_0$.

Если a есть точка перегиба, то график функции $h(x)$ в точке x_0 переходит с одной стороны оси абсцисс на другую. Докажем прежде всего, что $h''(x_0) = 0$. Доказательство будем вести от противного. Действительно, допустим, что $h''(x_0) > 0$. Так как $h'(x_0) = 0$, то функция $h(x)$ имеет в точке x_0 минимум и потому при всех x , достаточно близких к x_0 , имеем

$$h(x) \geq h(x_0) = 0.$$

Поэтому график функции $h(x)$ не переходит в точке x_0 с одной стороны оси абсцисс на другую. Точно так же разбирается случай

$h''(x_0) < 0$. Тогда функция $h(x)$ имеет в точке x_0 максимум, и потому $h(x) \leq h(x_0) = 0$; следовательно, и при $h''(x_0) < 0$ график функции $h(x)$ не переходит с одной стороны оси абсцисс на другую в точке x_0 . Итак, остается одна возможность: $h''(x_0) = 0$.
Далее, мы имеем

$$0 = h''(x_0) = h''(x_0) - K''(x_0) = f''(x_0), \quad (28)$$

так как $K''(x_0) = 0$. Таким образом, формула (28) доказана.

Не следует, однако, думать, что это равенство является достаточным условием для того, чтобы точка с абсциссой x_0 была точкой перегиба графика функции $f(x)$.

Читателю предлагается доказать, что точка a действительно является точкой перегиба, если

$$f''(x_0) = 0, \quad f'''(x_0) \neq 0, \quad (29)$$

так что условие (29) является достаточным условием для того, чтобы точка a была точкой перегиба.

Вернемся теперь к кубической параболе (6). Вычислим вторую производную функции (6). Мы имеем

$$f''(x) = (x^3 - px)'' = 6x. \quad (30)$$

Мы уже установили, что начало координат является точкой перегиба кубической параболы (2). Выражение (25) для второй производной функции (2) показывает, что начало координат является единственной точкой перегиба кубической параболы, так как вторая производная (25) обращается в нуль лишь при $x = 0$.

Третья производная функции (6) определяется формулой (см. (4))

$$f'''(x) = 6.$$

Таким образом, в точке $x = 0$ для кубической параболы (6) выполнены условия (29), откуда в частности вытекает, что точка $x = 0$ является точкой перегиба.

* * *

Займемся теперь общей кубической параболой (5). Выясним прежде всего, сколько действительных корней имеет многочлен (5).

Рассмотрим уравнение (14)

$$x^3 - px = c.$$

Как уже было сказано, при $p < 0$ это уравнение имеет лишь один действительный корень. При $p = 0$ это уравнение имеет также лишь один действительный корень, за исключением случая $c = 0$, когда имеется тройной корень $x = 0$. Если $c = 0$, уравнение (14) имеет три корня при

$$f(x_2) \leq c \leq f(x_1)$$

(см. (15)), где

$$f(x_1) = \frac{2}{3}p\sqrt{\frac{p}{3}}, \quad f(x_2) = -\frac{2}{3}p\sqrt{\frac{p}{3}},$$

(см. (12)), так что неравенство (15) можно записать в виде

$$|c| \leq \frac{2}{3}p\sqrt{\frac{p}{3}}, \quad (31)$$

причем для крайних значений c из отрезка (31) имеется один простой и один двойной корень. Вне отрезка (31) уравнение (14) имеет лишь один действительный корень.

Многочлен (5) можно привести к виду

$$\eta = f(\xi) = \xi^3 - p\xi \quad (32)$$

заменой переменных

$$x = \xi + \alpha, \quad y = \eta + \beta. \quad (33)$$

Такая замена означает параллельный сдвиг системы координат.

Производя подстановку (33), получим

$$\eta = \xi^3 + (3\alpha + a_1)\xi^2 + (3\alpha^2 + 2a_1\alpha + a_2)\xi + (\alpha^3 + a_1\alpha^2 + a_2\alpha + a_3 - \beta). \quad (34)$$

Для того чтобы многочлен (5) был приведен к виду (32), достаточно, чтобы были выполнены условия

$$3\alpha + a_1 = 0, \quad \alpha^3 + a_1\alpha^2 + a_2\alpha + a_3 - \beta = 0. \quad (35)$$

Из первого уравнения системы (35) имеем

$$\alpha = -\frac{a_1}{3}. \quad (36)$$

Подставляя это выражение для α во второе уравнение системы (35), получим

$$\beta = \frac{2a_1^3}{27} - \frac{a_1a_2}{3} + a_3. \quad (37)$$

Считая, что α и β заданы формулами (36) и (37), мы можем переписать (34) в виде

$$\eta = f(\xi) = \xi^3 - p\xi, \quad (38)$$

где

$$p = \frac{a_1^2}{3} - a_2. \quad (39)$$

Геометрическая форма кубической параболы (5) совпадает с геометрической формой параболы (38). Последняя же зависит от знака величины p (39).

* * *

Выясним теперь вопрос о том, сколько корней имеет многочлен $g(x)$ (см. (5)). Многочлены $g(x)$ и $f(\xi)$ связаны соотношением

$$f(\xi) = g(x) - \beta.$$

Таким образом, число корней многочлена $g(x)$ равно числу корней многочлена $f(\xi) + \beta$ или, что то же самое, числу корней уравнения $f(\xi) = -\beta$. Но это число нам уже известно (см. (14)). Следовательно, при $p < 0$ (см. (38)) многочлен $g(x)$ имеет один действительный корень, при $p = 0$ многочлен $g(x)$ также имеет один действительный корень, за исключением случая, когда величина β (см. (37)) равна нулю.

Рассмотрим случай $p > 0$. Если величина β (см. (37)) удовлетворяет условию

$$|\beta| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}} p^{3/2} \quad (40)$$

(см. (31)), то многочлен $g(x)$ имеет три действительных корня, причем на концах отрезка (40) два корня сливаются в один. Подставляя в (40) величины β и p из соотношений (37) и (39) и возводя полученное соотношение в квадрат, получим условие

$$\left(\frac{2a_1^3}{27} - \frac{a_1 a_2}{3} + a_3 \right)^2 \leq \frac{4}{27} \left(\frac{a_1^2}{3} - a_2 \right)^3. \quad (41)$$

Полученное условие является полным критерием наличия трех действительных корней многочлена $g(x)$, так как при его выполнении исключается случай $p < 0$. Ведь правая часть неравенства (41) при $p < 0$ отрицательна, в то время как левая часть, будучи квадратом, не может быть отрицательной.

* * *

Укажем теперь путь изучения графика многочлена четвертой степени

$$y = h(x) = x^4 + b_1x^3 + b_2x^2 + b_3x + b_4.$$

Для выяснения его поведения следует изучить поведение многочлена

$$h'(x) = 4x^3 + 3b_1x^2 + 2b_2x + b_3.$$

Этот многочлен имеет степень 3 и вопрос о том, сколько у него действительных корней, нами уже решен.

Так как многочлен $h(x)$ неограниченно возрастает, оставаясь положительным, когда $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$ ¹, то в случае, если многочлен $h'(x)$ имеет лишь один действительный корень, многочлен $h(x)$ имеет лишь один минимум. Если же многочлен $h'(x)$ имеет три различных действительных корня, то многочлен $h(x)$ имеет два минимума и один максимум. Вид графика функции $h(x)$ в этих двух случаях дан на рисунке 3, а, б, а в случае, когда

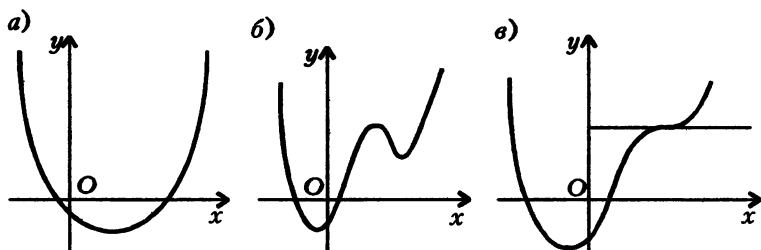


Рис. 3

два действительных корня сливаются в один, график имеет вид, показанный на рисунке 3, в.

* * *

В заключение приведу формулу Кардано (1501—1576) для решения кубического уравнения (14), т.е. уравнения

$$x^3 - px = c. \quad (42)$$

После того как решение будет получено, мы сможем заменить p

¹ Т.е. когда x неограниченно возрастает по модулю, оставаясь положительным ($x \rightarrow +\infty$) и оставаясь отрицательным ($x \rightarrow -\infty$). (Прим. ред.)

и c в соответствии с формулами (37) и (39). Таким образом, мы можем получить формулу для нахождения всех корней многочлена (5).

Для решения уравнения (42) производится замена переменного на сумму двух новых неизвестных u и v , т.е.

$$x = u + v.$$

Новые неизвестные u и v мы свяжем некоторым дополнительным соотношением. Подставляя $x = u + v$ в уравнении (42), получим

$$u^3 + v^3 + (3uv - p)(u + v) = c. \quad (44)$$

В качестве упомянутого дополнительного соотношения выберем такое, которое обращает в нуль второе слагаемое левой части, а именно $3uv = p$. После этого мы получаем соотношение $u^3 + v^3 = c$. Возводя соотношение $3uv = p$ в куб, получаем $u^3 v^3 = p^3 / 27$. Таким образом, нам известна сумма u^3 и v^3 и произведение $u^3 v^3$. Следовательно, $z_1 = u^3$ и $z_2 = v^3$ являются двумя корнями квадратного уравнения $z^2 - cz + p^3 / 27 = 0$. Отсюда

$$z_1 = u^3 = \frac{c}{2} + \sqrt{\frac{c^2}{4} - \frac{p^3}{27}}, \quad (45)$$

$$z_2 = v^3 = \frac{c}{2} - \sqrt{\frac{c^2}{4} - \frac{p^3}{27}}. \quad (46)$$

Очень интересным является тот факт, что подкоренное выражение в (45), (46) отрицательно тогда и только тогда, когда уравнение (42) имеет три различных действительных корня. Таким образом, именно в случае трех действительных корней в промежуточных вычислениях появляются комплексные числа. Это обстоятельство исторически сыграло важную роль, показав, что рассмотрение комплексных чисел необходимо для получения результата в виде действительных чисел.

Теперь мы можем выписать саму формулу Кардано для решения уравнения (42):

$$x = \sqrt[3]{\frac{c}{2} + \sqrt{\frac{c^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{c}{2} - \sqrt{\frac{c^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}. \quad (47)$$

Формула (47) дает выражение для всех трех решений уравнения (42) при подходящем выборе комплексных значений кубического корня.

ГРАФИК КУБИЧЕСКОГО ЧЕТЫРЕХЧЛЕНА

О. Жаутыков

Поставим своей задачей научиться строить график функции

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0), \quad (1)$$

т.е. многочлена 3-й степени. Конечно, можно пытаться построить кривую (1) по точкам. Но это слишком долгий путь, требующий утомительных вычислений. Мы расскажем о более простом способе, позволяющем в каждом конкретном случае легко представить себе в общих чертах поведение кривой, описываемой уравнением (1).

Будем исходить из графика функции

$$y = x^3, \quad (2)$$

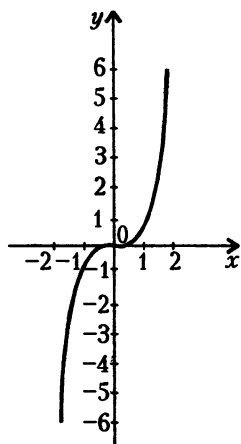


Рис. 1

называемого кубической параболой. Эта кривая строится по точкам (рис.1); ее вид необходимо запомнить. Она играет при изучении графика кубического многочлена (1) роль, аналогичную роли параболы $y = x^2$ в теории квадратного трехчлена.

Кубическая парабола обладает следующими основными свойствами:

1) она симметрична относительно начала координат и проходит в третьей и первой четвертях (другими словами, функция (2) – нечетная);

2) в начале координат кубическая парабола пересекает ось абсцисс, одновременно касаясь ее.

Легко сообразить далее, как выглядит график функции

$$y = ax^3, \quad (3)$$

где a — действительное число (рис.2). Если $a > 0$, то кривая (3) симметрична относительно начала координат и проходит в третьей и первой четвертях; чем больше a , тем круче ветви кривой (3), чем меньше a , тем они положе. Например, при $a > 1$ ветви кривой (3) сильнее по сравнению с кубической параболой (2) прижаты к оси Oy .

При $a < 0$ график функции (3) симметричен кривой $y = |a|x^3$ относительно оси ординат — он проходит во второй и четвертой четвертях.

Наконец, рассмотрим график функции

$$y = ax^3 + mx. \quad (4)$$

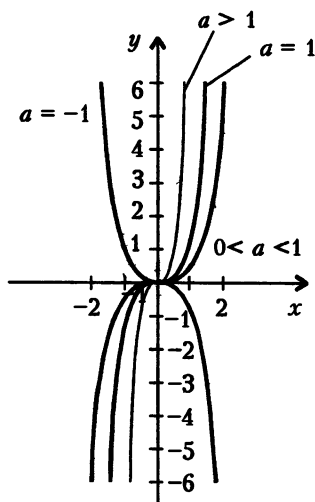


Рис. 2

Его легко построить методом сложения двух графиков — уже знакомой нам кривой (3) и прямой $y = mx$, проходящей через начало координат: нужно при каждом значении абсциссы x сложить соответствующие ординаты кривой (3) и прямой $y = mx$.

Ясно, что вид графика функции (4) зависит от знаков чисел a и m . Именно, если $a > 0$ и $m < 0$, то кривая (4) имеет вид, показанный на рисунке 3,а, если же $a > 0$ и $m > 0$, — то вид, изображенный на рисунке 3,б. График функции (4) в случае $a < 0$ и $m > 0$ (рис.3,в) получается зеркальным отображением относительно оси ординат кривой, изображенной на рисунке 3,а, а в случае $a < 0$ и $m < 0$ (рис.3,г) — зеркальным отображением кривой на рисунке 3,б.

Основные свойства кривой (4) состоят в следующем:

1) она пересекает (в начале координат) прямую $y = mx$, одновременно касаясь ее;

2) если числа a и m одного знака, то эта кривая лишь в начале координат пересекает ось абсцисс; если же числа a и m разных знаков, то эта кривая трижды пересекает ось абсцисс (в точках

$$x = 0 \text{ и } x = \pm \sqrt{-\frac{m}{a}}).$$

Итак, график функции (4) мы рисовать научились. А теперь покажем, что для любой функции типа (1) всегда можно

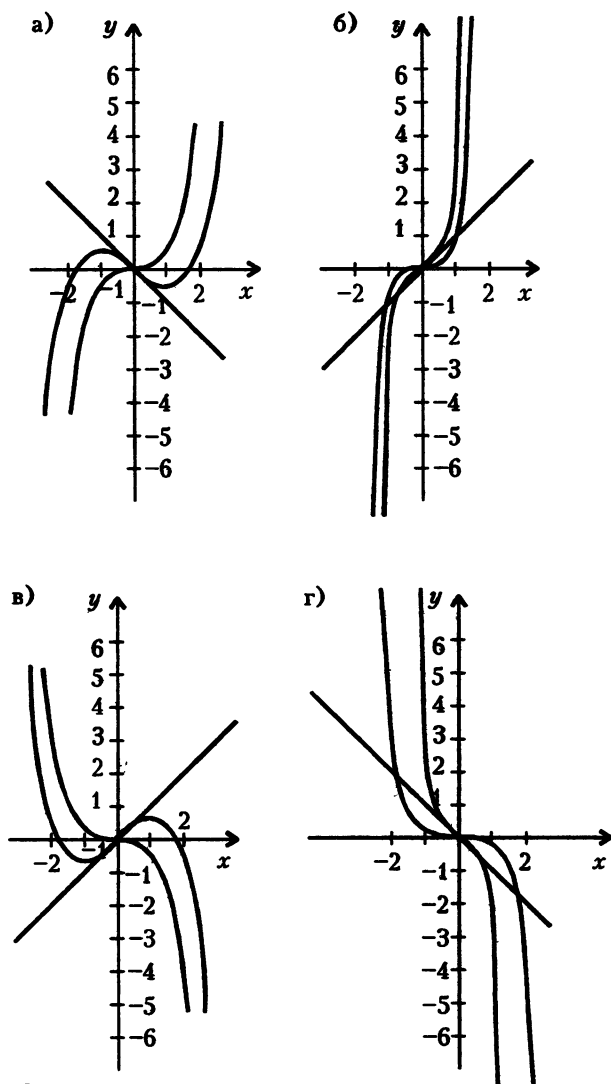


Рис. 3

найти такие (действительные) числа m , k , h , что график функции (1) получается смещением кривой (4) на h влево и на k вниз.

В самом деле, если перенести кривую (4) на h влево и на k

вниз, то получится кривая, описываемая уравнением

$$y + k = a(x + h)^3 + m(x + h),$$

или

$$y = ax^3 + 3ahx^2 + (3ah^2 + m)x + (ah^3 + mh - k).$$

Этот многочлен будет совпадать с многочленом (1), если $b = 3ah$, $c = 3ah^2 + m$, $d = ah^3 + mh - k$, т.е. если числа h , m и k положить равными

$$h = \frac{b}{3a}, \quad m = c - \frac{b^2}{3a}, \quad k = \frac{bc}{3a} - \frac{2b^3}{27a^2} - d. \quad (5)$$

Следовательно, графиком функции (1) служит кривая (4), где число m берется из (5), смещенная на h влево, если $h > 0$, или на $|h|$ вправо, если $h < 0$, и на k вниз, если $k > 0$, или на $|k|$ вверх, если $k < 0$, где числа h и k определяются по формулам (5).

Пример. Постройте график функции $y = x^3 - 4x^2 - 4x + 16$.

По формулам (5) находим: $m = -9\frac{1}{3}$, $h = -1\frac{1}{3}$, $k = -5\frac{25}{27}$.

Поэтому нам нужно построить график функции

$$y = x^3 - \frac{28}{3}x$$

(рис.4,а), а затем передвинуть его на $\frac{4}{3}$ вправо вдоль оси абсцисс

и на $\frac{160}{27}$ вверх вдоль оси ординат (рис.4,б).

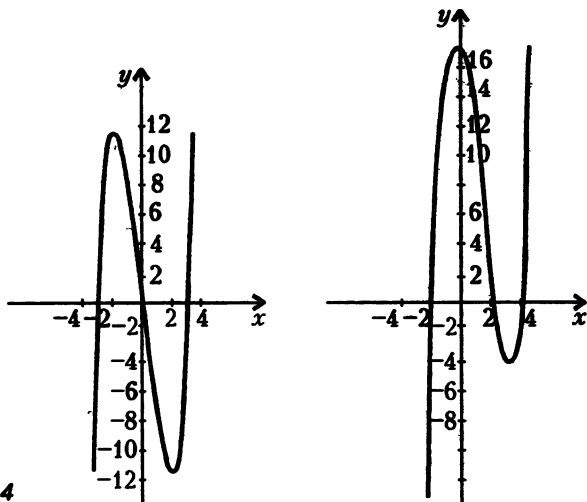


Рис. 4

ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ КУБИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

А.Краснодемская

Известная формула Кардано

$$x = \sqrt[3]{-\frac{k}{54} + \sqrt{\frac{-D}{108}}} + \sqrt[3]{-\frac{k}{54} - \sqrt{\frac{-D}{108}}} - \frac{b}{3a},$$

где

$$k = (2b^3 - 9abc + 27a^2d)/a^3,$$

$$D = (b^2c^2 - 4ac^3 - 4b^3d + 18abcd - 27a^2d^2)/a^4,$$

позволяет точно находить корни кубического уравнения

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0. \quad (*)$$

Правда, вычисления по этой формуле занимают много времени, не говоря уже о том, что во многих случаях приходится оперировать с комплексными числами. А нельзя ли находить корни уравнения (*) пусть приближенно, но быстро, скажем, графически — с помощью циркуля и линейки? Оказывается, одними лишь циркулем и линейкой обойтись нельзя — циркулем и линейкой можно строить лишь величины, выражающиеся через исходные данные с помощью действий сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения квадратного корня (скажем, так выражаются через коэффициенты корни квадратного уравнения, поэтому квадратные уравнения можно решать графически с помощью циркуля и линейки).

А корни кубического уравнения требуют еще извлечения кубического корня, поэтому в общем случае их нельзя построить с помощью циркуля и линейки. Например, «геометрически неразрешимо» уравнение $x^3 - 2 = 0$.

В то же время многие задачи, неразрешимые с помощью циркуля и линейки, решаются с помощью других приборов или

хитрым использованием линейки. Не являются исключением и кубические уравнения – их можно решать графически с помощью двух угольников и линейки. Для этого отметим в прямоугольной декартовой системе координат xOy точки $A(b, a)$ и $B(d, c)$ (рис. 1). Если мы сумеем пройти из точки A в точку B по маршруту: точка A – ось абсцисс (точка M на рисунке 1) – ось ординат (точка N) – точка B , – поворачивая каждый раз на 90° , то число

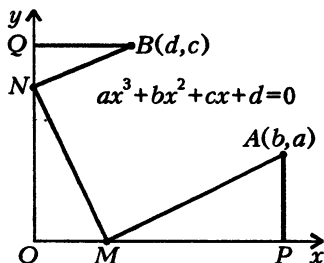


Рис. 1

$$x_0 = \frac{x_M - b}{a},$$

где x_M – абсцисса точки M , будет действительным корнем уравнения (*), т.е. x_0 равно длине проекции первого звена AM ломаной на ось Ox (с учетом знака), деленной на a . (Если можно провести только одну такую ломаную линию, то имеются или один действительный корень и два комплексно-сопряженных, или три действительных совпадающих корня; если две, то имеются три действительных корня, два из которых совпадают; если же возможно построение трех таких ломаных, то имеются три действительных различных корня.)

Для доказательства приведенного графического способа решения рассмотрим три подобных прямоугольных треугольника PMA , OMN и QNB (рис. 1). Из их подобия вытекают пропорции $\frac{PM}{PA} = \frac{ON}{OM} = \frac{QB}{QN}$. Имеем: $PM = -ax_0$, $PM = a$, $OM = b + ax_0$, $QB = d$, $QN = c - ON$. Теперь пропорции запишутся в виде

$$\frac{-ax_0}{a} = \frac{ON}{b + ax_0} = \frac{d}{c - ON},$$

откуда $x_0 = \frac{-ON}{b + ax_0}$, $x_0 = \frac{-d}{c - ON}$, и далее, $x_0 = \frac{-d}{c + x_0(b + ax_0)}$, $ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d = 0$. Следовательно, x_0 является корнем уравнения (*). Другие случаи расположения точек A , B , P , Q , M , N разберите самостоятельно.

Наибольшую трудность при графическом способе решения кубических уравнений представляет построение ломаной линии $AMNB$. Его можно выполнять с помощью линейки и двух

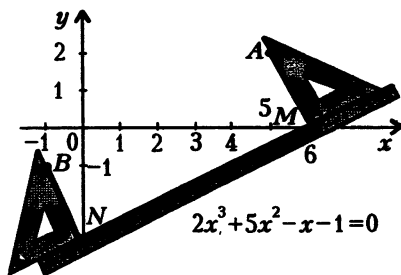


Рис. 2

угольников или рейсшины и угольника. Например, на рисунке 2 изображено нахождение одного корня уравнения $2x^3 + 5x^2 - x - 1 = 0$, он оказывается равным $1/2$. Между тем это уравнение имеет три действительных корня; попробуйте найти и их графически, а также решить следующие задачи.

Упражнения

1. Попробуйте геометрически описать области, в которых должны лежать точки A и B, чтобы уравнение имело

- а) три действительных корня;
- б) два действительных корня;
- в) один действительный корень.

2. Решите графически следующие уравнения:

- а) $4x^3 + 11x^2 + 14x + 6 = 0$;
- б) $4x^3 + 6x^2 + 2x - 3 = 0$;
- в) $2x^3 + 5x^2 + x - 2 = 0$;
- г) $2x^3 + 4x^2 - 5x + 3 = 0$.

О ГРАНИЦАХ КОРНЕЙ КУБИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

О. Жаутыков

Рассмотрим кубическое уравнение

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad (1)$$

коэффициенты которого a, b, c, d — действительные числа, $a \neq 0$. Первое слагаемое ax^3 в левой части уравнения (1) называется его *старшим членом*, последнее слагаемое d — *свободным членом*.

Как известно, уравнение (1) имеет три корня, один из которых — действительный, а два других — либо действительные, либо комплексно-сопряженные. Нас будут интересовать только *действительные* корни уравнения (1). Наша цель такова: *не вычисляя самих корней, получить некоторые границы (оценки) для них*, т.е. указать на действительной оси интервалы, в которых лежат эти корни.

Для этого вместе с уравнением (1) рассмотрим многочлен третьей степени

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d. \quad (2)$$

Что можно сказать о поведении этой функции при больших по абсолютной величине значениях x ? Если аргумент x принимает возрастающие по абсолютной величине значения, то абсолютная величина каждого члена правой части равенства (2) будет возрастать, причем тем быстрее, чем выше степень этого члена.

Ясно, что быстрее всего будет возрастать абсолютная величина старшего члена ax^3 . Поэтому можно ожидать, что если выбрать значение $|x|$ достаточно большим, то абсолютная величина старшего члена ax^3 будет больше абсолютной величины суммы всех остальных членов, т.е.

$$|ax^3| > |bx^2 + cx + d|. \quad (3)$$

Докажем, что это неравенство справедливо для всех x , достаточно больших по абсолютной величине.

Поскольку абсолютная величина суммы не превышает суммы абсолютных величин слагаемых, то

$$|bx^2 + cx + d| \leq |b|x^2 + |c||x| + |d|.$$

Положив $|x| = v$, перепишем это неравенство:

$$|bx^2 + cx + d| \leq |b| \cdot v^2 + |c|v + |d|. \quad (4)$$

Коэффициенты $|b|$, $|c|$, и $|d|$, стоящие в правой части неравенства (4), — неотрицательные действительные числа; обозначим наибольшее из них через M :

$$M = \max(|b|, |c|, |d|). \quad (5)$$

Если в правой части неравенства (4) вместо каждого из коэффициентов $|b|$, $|c|$, $|d|$ подставить число M , то неравенство (4) от этого только усилится. Следовательно, справедливо неравенство

$$|bx^2 + cx + d| \leq M(v^2 + v + 1),$$

которое, если воспользоваться известным тождеством

$$v^2 + v + 1 = \frac{v^3 - 1}{v - 1}, \quad v \neq 1,$$

можно записать в виде

$$|bx^2 + cx + d| \leq M \frac{v^3 - 1}{v - 1}. \quad (6)$$

Так как нас интересуют большие значения $|x| = v$, будем считать, что $v > 1$. Но тогда

$$\frac{M(v^3 - 1)}{v - 1} < \frac{Mv^3}{v - 1},$$

и потому неравенство (6) примет вид

$$|bx^2 + cx + d| \leq \frac{Mv^3}{v - 1}, \quad |x| = v > 1. \quad (7)$$

Если нам удастся показать, что абсолютная величина старшего члена ax^3 для всех достаточно больших по абсолютной величине значений x (таких, что выполнено и условие $v > 1$)

больше выражения $\frac{Mv^3}{v - 1}$, стоящего в правой части неравенства (7), то неравенство (3) будет доказано. Посмотрим, как надо

выбрать $|x| = v$, чтобы выполнялось неравенство $|ax^3| > \frac{Mv^3}{v-1}$, т.е.

$$|a|v^3 > \frac{Mv^3}{v-1}.$$

Решая полученное неравенство относительно v , находим, что оно заведомо выполнено для всех

$$v > \frac{M + |a|}{|a|}. \quad (8)$$

Так как $\frac{M + |a|}{|a|} \geq 1$ (ибо $M \geq 0$), то при условии (8) всегда выполнено и неравенство $v > 1$. Тем самым установлено, что *неравенство (3) справедливо для*

$$|x| \geq \frac{M + |a|}{|a|}. \quad (9)$$

Отсюда следует, что для значений x , удовлетворяющих условию (9), функция (2) не может обратиться в нуль. Другими словами, *все действительные корни уравнения (1) удовлетворяют неравенству*

$$|x| \leq \frac{M + |a|}{|a|}. \quad (10)$$

Положительное число $A = \frac{M + |a|}{|a|}$ называется *верхней границей* действительных корней кубического уравнения (1).

Оказывается, что можно найти и *нижнюю границу* действительных корней кубического уравнения (1), т.е. такое неотрицательное число B , что все действительные корни уравнения (1) удовлетворяют неравенству $x \geq B$.

Для этого сделаем в уравнении (1) замену

$$x = \frac{1}{z}. \quad (11)$$

Тогда после очевидных преобразований получим уравнение

$$dz^3 + cz^2 + bz + a = 0. \quad (12)$$

Будем считать, что в уравнении (1) свободный член $d \neq 0$, ибо случай $d = 0$ интереса не представляет (уравнение (1) в этом случае имеет корень $x = 0$, а остальные его корни определяются из квадратного уравнения).

Так как $|x| = \frac{1}{|z|}$ (см. (11)), то ясно, что из неравенства

$|z| < K$, где $K > 0$, следует неравенство $|x| > \frac{1}{K}$. Поэтому если в качестве K взять верхнюю границу действительных корней уравнения (12), то число $\frac{1}{K}$ будет нижней границей действительных корней уравнения (1). Но верхнюю границу K действительных корней уравнения (12) находить мы уже умеем (см. (5), (10)):

$$K = \frac{N + |d|}{|d|}, \text{ где } N = \max(|c|, |b|, |a|). \quad (13)$$

Поэтому нижняя граница действительных корней кубического уравнения (1) такова:

$$B = \frac{|d|}{N + |d|}. \quad (14)$$

Остается заметить, что эта формула годится и в случае $d = 0$, тогда нижняя граница, очевидно, равна нулю (ибо имеется нулевой корень), и именно этот же результат получается по формуле (14) (при этом, конечно, $N \neq 0$, ибо в уравнении (1) по предположению $a \neq 0$).

Подведем итог: *все действительные корни кубического уравнения (1) удовлетворяют неравенству*

$$B \leq |x| \leq A,$$

где числа A и B определяются через коэффициенты уравнения по формулам (10), (5) и (14), (13). Другими словами, действительные корни кубического уравнения (1) могут лежать только на отрезках $[-A; -B]$ и $[B; A]$ действительной оси; вне этих отрезков действительных корней уравнение (1) заведомо не имеет.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$2x^3 + 5x^2 - 4x - 3 = 0.$$

Здесь $M = 5$, $|a| = 2$, а потому $A = \frac{7}{2}$. Таким образом, верхняя граница действительных корней рассматриваемого уравнения равна $\frac{7}{2}$. Далее, $N = 5$, $|d| = 3$, а потому $B = \frac{3}{8}$. Следовательно, нижняя граница действительных корней рассматриваемого уравнения равна $\frac{3}{8}$. Другими словами, вещественные корни рассматриваемого уравнения лежат на отрезках $(-7/2; -3/8)$ и $(3/8; 7/2)$.

МНОГОЧЛЕНЫ, НАИМЕНЕЕ УКЛОНЯЮЩИЕСЯ ОТ НУЛЯ

С. Табачников

Я расскажу об одной из самых красивых задач о многочленах – задаче Чебышёва о многочленах, наименее уклоняющихся от нуля. Зафиксируем некоторый отрезок числовой оси, скажем, отрезок $[-2; 2]$ (говоря «скажем», я немного лукавлю – именно для этого отрезка получаются наиболее простые формулы). Пусть

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n$$

– *приведенный* многочлен n -й степени (это значит, что его старший коэффициент равен 1). Множество значений $f(x)$ на отрезке $[-2; 2]$ – отрезок $[m; M]$, где m – минимум, а M – максимум многочлена. *Уклонением многочлена от нуля* называется наибольшее из чисел $|m|, |M|$. Если уклонение многочлена от нуля равно c , то его график содержится в полосе $|y| \leq c$ и не содержится ни в какой более узкой полосе со средней линией Ox .

Задача состоит в том, чтобы найти такой *приведенный* многочлен n -й степени $f_n(x)$, уклонение которого от нуля было бы минимальным (условие, что старший коэффициент равен 1, не позволяет сжать график произвольно близко к оси абсцисс). На первый взгляд, задача Чебышёва вызывает мало энтузиазма: чтобы искать уклонение от нуля, нужно вычислять производные и решать уравнения n -й степени... Тем более удивительно, что эта задача решается геометрически – и почти без вычислений!

Давайте сначала, «не мудрствуя лукаво», разберем случаи малых степеней. При $n = 1$ речь идет просто о линейной функции $f(x) = x + a$. Ее множество значений – отрезок $[-2 + a; 2 + a]$ длиной 4. Поэтому наименьшее уклонение от нуля равно 2, а $f_1(x) = x$.

Немного сложнее случай $n = 2$ (случай квадратного трехчлена). График многочлена второй степени – отрезок параболы; и

довольно очевидно, что параболу выгоднее всего расположить так, как изображено на рисунке 1. При этом $f(x) = x^2 - 2$, а уклонение от нуля снова оказывается равным 2.

Упражнение 1. Проверьте интуицию вычислением: докажите, что уклонение от нуля квадратного трехчлена не меньше 2.

Я мог бы предложить вам исследовать случай многочленов третьей степени и убедиться, что и в этом случае наименьшее уклонение от нуля равно 2. Эта задача еще допускает решение «в лоб». Но мне не терпится рассказать вам общее решение.

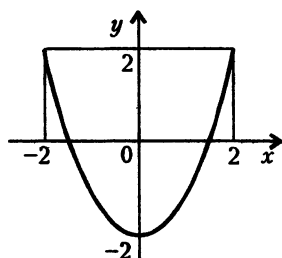


Рис. 1

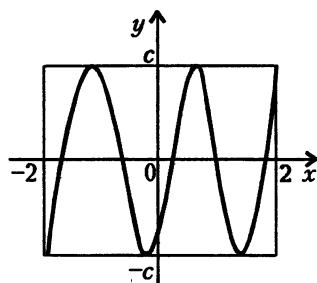


Рис. 2

Предположим, что нам удалось обнаружить такой приведенный многочлен n -й степени $f_n(x)$, что его график лежит в полосе $|y| \leq c$ и содержит $n + 1$ точку ее границы: самая правая лежит на прямой $y = c$, следующая – на прямой $y = -c$, следующая – снова на прямой $y = c$ и т.д. ($n = 5$ на рисунке 2).

Теорема. Уклонение от нуля любого приведенного многочлена n -й степени, отличного от $f_n(x)$, больше c .

Вот геометрическое доказательство, которое и делает задачу Чебышёва столь привлекательной. Пусть $g(x)$ – другой приведенный многочлен n -й степени, уклонение которого от нуля не превосходит c . Тогда его график

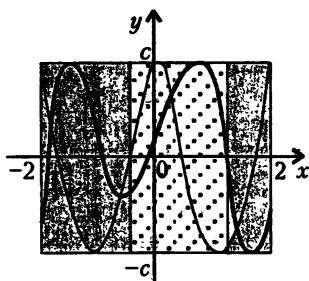


Рис. 3

тоже лежит в полосе $|y| \leq c$. Разобьем эту полосу вертикальными отрезками на n прямоугольников так, как показано на рисунке 3. Тонкая кривая – график $f_n(x)$ – соединяет по диагонали противоположные вершины каждого прямоугольника. Поэтому толстая кривая – график $g(x)$ – пересекает тонкую внутри каждого из них. Следовательно,

уравнение $f_n(x) - g(x) = 0$ имеет не менее n корней. Но степень многочлена $f_n(x) - g(x)$ не больше чем $(n-1)$. Если такой многочлен все же имеет n корней, то он тождественно равен нулю, т.е. $g(x) = f_n(x)$. Теорема доказана.

Вдумайтесь в это доказательство. Почти даром мы получили довольно много: хотя значение c нам еще не известно, мы уже знаем, что существует только один наименее уклоняющийся от нуля многочлен данной степени, и представляем, как выглядит его график.

Упражнение 2. Приведенное доказательство содержит пробел (это – плата за красоту). Как быть в случае, если графики многочленов $f_n(x)$ и $g(x)$ касаются (рис. 4)?

Подсказка: вспомните определение кратного корня многочлена.

Итак, нам нужно предъявить многочлен $f_n(x)$, график которого ведет себя так, как изображено на рисунке 2. Этот рисунок не может не напоминать вам о тригонометрических функциях. И действительно, сейчас они вступают в игру!

Проще всего было бы взять в качестве f_n что-то вроде функции $\cos n\alpha$. Но, увы: косинус – не многочлен. На помощь приходит следующая

Лемма. Функция $2\cos n\alpha$ выражается в виде приведенного многочлена n -й степени от функции $2\cos \alpha$:

$$2\cos n\alpha = f_n(2\cos \alpha).$$

Например,

$$2\cos 2\alpha = 4\cos^2 \alpha - 2 = (2\cos \alpha)^2 - 2,$$

$$\text{т.е. } f_2(x) = x^2 - 2;$$

$$2\cos 3\alpha = 8\cos^3 \alpha - 6\cos \alpha = (2\cos \alpha)^3 - 3(2\cos \alpha),$$

$$\text{т.е. } f_3(x) = x^3 - 3x.$$

Доказательство леммы проводится по индукции. Пусть ее утверждение доказано для чисел $n-1$ и n :

$$2\cos(n-1)\alpha = f_{n-1}(2\cos \alpha),$$

$$2\cos n\alpha = f_n(2\cos \alpha).$$

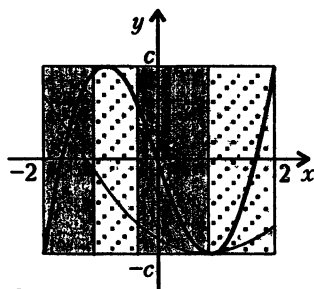


Рис. 4

Из формулы

$$\cos(n+1)\alpha + \cos(n-1)\alpha = 2 \cos \alpha \cos n\alpha$$

следует, что

$$\begin{aligned} 2 \cos(n+1)\alpha &= (2 \cos \alpha)(2 \cos n\alpha) - 2 \cos(n-1)\alpha = \\ &= (2 \cos \alpha)f_n(2 \cos \alpha) - f_{n-1}(2 \cos \alpha). \end{aligned}$$

Значит,

$$f_{n+1}(x) = xf_n(x) - f_{n-1}(x).$$

Лемма доказана, а заодно получена рекуррентная формула для вычисления многочленов $f_n(x)$.

Как вы догадались, многочлены $f_n(x)$ — это то, что нам нужно. Действительно, пусть α пробегает отрезок $[0; \pi]$. Тогда $n\alpha$ изменяется от 0 до $n\pi$, а функции $x = 2 \cos \alpha$ и $f_n(x) = 2 \cos n\alpha$ принимают значения на отрезке $[-2; 2]$. При этом x пробегает этот отрезок один раз, а $f_n(x)$ — n раз, поочередно принимая значения ± 2 при $x = \arccos\left(\frac{\pi k}{n}\right)$, $k = 0, 1, \dots, n$. Значит, график многочлена $f_n(x)$ лежит в полосе $|y| \leq 2$ и содержит попеременно $n+1$ точку ее верхней и нижней границы. Т.е. $f_n(x)$ — многочлен, наименее уклоняющийся от нуля на отрезке $[-2; 2]$ (а уклонение равно 2). Эти многочлены называются *многочленами Чебышёва*.

Из сказанного следует неожиданный вывод:

каким бы ни был приведенный многочлен $g(x)$, найдется такая точка отрезка $[-2; 2]$, в которой модуль его значения не меньше 2.

Предвидеть такой результат, по-моему, было бы невозможно. После того как задача о многочленах, наименее уклоняющихся от нуля, решена на отрезке $[-2; 2]$, ее нетрудно решить и на любом другом отрезке. Для этого достаточно сделать в многочленах Чебышёва линейную замену переменных.

Упражнение 3. Найдите наименьшее уклонение от нуля приведенных многочленов n -й степени на отрезках а) $[0; 4]$; б) $[-1; 1]$.

Многочлены Чебышёва, безусловно, заслуживают более подробного разговора. Рассказ об их комбинаторных свойствах уже появлялся в «Кванте».¹ К нему я и отсылаю тех, кого заинтересовали многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля.

¹ См. статью Н.Васильева, А.Зелевинского «Многочлены Чебышёва» (Приложение к журналу «Квант» №6 за 1998 г.)

ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ЧИСЛА

М.Хапланов

Понятие о *числе* формировалось на протяжении тысячелетий. И лишь двести лет тому назад – прежде всего в трудах Л.Эйлера (1707 – 1783) – в математику вошли комплексные числа, и завершилось развитие понятия о числе.

Напомним этапы (нехронологические) этого развития:

а) *натуральные числа* 1, 2, 3, ...;

б) *целые числа* ... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...;

в) *рациональные числа*, т.е. числа вида $\frac{p}{q}$, где p – целое, q – натуральное число;

г) *действительные числа*, т.е. числа, выражаемые бесконечными десятичными дробями;

д) *комплексные числа*, т.е. числа вида $a + bi$, где a и b – действительные числа, а символ i определяется условием $i^2 = -1$.

В этой последовательности каждый следующий класс содержит все числа предыдущего класса и дополнительно «новые» числа. При каждом расширении класса чисел мы приобретаем возможность производить во всех случаях те или иные действия, которые не всегда выполнимы в «старых» числах. Так, в классе целых чисел всегда выполнимо вычитание, а в классе рациональных сверх того всегда выполнимо деление (на ненулевые числа), в классе действительных чисел всегда выполнимы не только четыре арифметических действия, но – для положительных чисел – извлечение корня, и вообще возведение в любую действительную степень, а также нахождение логарифма. Наконец, как доказал в 1799 году Гаусс (1777 – 1855), в комплексных числах всегда разрешимы *алгебраические уравнения* любой степени: уравнение

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad (1)$$

где n — натуральное число, а коэффициенты — комплексные, имеет n комплексных корней. Еще раньше (1748 г.) Эйлер построил теорию показательной, логарифмической, тригонометрических и обратных им функций от комплексного аргумента.

В настоящей статье мы рассмотрим другую классификацию чисел, а именно, разбиение их на *алгебраические* и *неалгебраические* (иначе — *трансцендентные*).

Определение. Число называется алгебраическим, если существует алгебраическое уравнение с целыми коэффициентами, корнем которого оно является.

Подчеркнем: алгебраические числа — это корни многочленов с целыми коэффициентами.

Очевидно, рациональные числа являются алгебраическими: $\frac{p}{q}$ есть корень уравнения $qx - p = 0$ с целыми коэффициентами q и $-p$. Алгебраическими числами являются корни квадратных уравнений с целыми коэффициентами, например: число i (корень уравнения $z^2 + 1 = 0$), число $-\sqrt{5} - 1$ (корень уравнения $z^2 + 2z - 4 = 0$), число $1 - i\sqrt{5}$ (корень уравнения $z^2 - 2z + 6 = 0$).

Существуют ли трансцендентные числа?

Естественно возникает вопрос: а есть ли вообще трансцендентные числа?

Положительный ответ на него дал в 1844 году французский математик Лиувиль (1809—1882). В 1873 году Эрмит доказал трансцендентность числа e , в 1882 году Линдеман — трансцендентность числа π . В 1900 году на II Международном конгрессе математиков в Париже Д. Гильберт (1860—1940), среди поставленных им и ставших знаменитыми 23 проблем, сформулировал седьмую проблему: *трансцендентны ли числа вида α^β , где α — алгебраическое число, отличное от нуля и единицы, а β — иррациональное алгебраическое число?*

Положительный ответ на этот вопрос дал в 1934 году выдающийся советский математик А. О. Гельфонд (1906—1968).

Результаты Лиувилля

В дальнейшем мы будем предполагать, что алгебраические и трансцендентные числа — действительные, хотя все остается справедливым и для комплексных чисел (см. упражнения в конце статьи).

Теорема 1. Пусть α — иррациональное число, являющееся корнем уравнения

$$f(z) \equiv a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (2)$$

По коэффициентам уравнения и произвольному $A > |\alpha|$ можно найти такое число M , что для любой дроби $\frac{p}{q}$, $\left| \frac{p}{q} \right| \leq A$, не являющейся корнем уравнения (2), справедливо неравенство

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{Mq^n}.$$

Доказательство. По условию теоремы имеем:

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= a_0 \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \dots + a_{n-1} \alpha + a_n = 0, \\ f\left(\frac{p}{q}\right) &= a_0 \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_1 \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \dots + a_{n-1} \left(\frac{p}{q}\right) + a_n \neq 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} f\left(\frac{p}{q}\right) &= f\left(\frac{p}{q}\right) - f(\alpha) = a_0 \left[\left(\frac{p}{q}\right)^n - \alpha^n \right] + \\ &+ a_1 \left[\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} - \alpha^{n-1} \right] + \dots + a_{n-1} \left(\frac{p}{q} - \alpha \right) = \\ &= \left(\frac{p}{q} - \alpha \right) \left(a_0 \left[\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \left(\frac{p}{q}\right)^{n-2} \alpha + \dots + \left(\frac{p}{q}\right) \alpha^{n-2} + \alpha^{n-1} \right] + \right. \\ &\quad \left. + a_1 \left[\left(\frac{p}{q}\right)^{n-2} + \left(\frac{p}{q}\right)^{n-3} \alpha + \dots + \alpha^{n-2} \right] + \dots + a_{n-1} \right). \end{aligned}$$

Так как $|\alpha| < A$, $\left| \frac{p}{q} \right| \leq A$, то

$$\left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| \leq \left| \frac{p}{q} - \alpha \right| M, \quad (4)$$

где

$$M = |a_0| n A^{n-1} + |a_1| (n-1) A^{n-2} + \dots + |a_{n-1}|. \quad (5)$$

Но

$$\left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| = \frac{|a_0 p^n + a_1 p^{n-1} q + \dots + a_n q^n|}{q^n}. \quad (6)$$

В числителе дроби (6) $a_0, a_1, \dots, a_n, p, q$ — целые числа, поэтому числитель (6) — целое число, а так как $f\left(\frac{p}{q}\right) \neq 0$, то он не меньше единицы. Следовательно,

$$\left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| \geq \frac{1}{q^n}. \quad (7)$$

Из (4) и (7) следует (3). Теорема доказана.

Теорема 2. Число

$$\alpha = c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^{2!}} + \frac{c_3}{10^{3!}} + \dots + \frac{c_k}{10^{k!}} + \dots,$$

где c_0 — произвольное целое, а c_1, c_2, \dots принимают одно из значений 0, 1, 2, ..., 9 и не равны нулю подряд, начиная с некоторого, — трансцендентно.

Доказательство. Положим

$$c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^{2!}} + \frac{c_3}{10^{3!}} + \dots + \frac{c_k}{10^{k!}} = \frac{p}{q}. \quad (8)$$

Тогда

$$\alpha - \frac{p}{q} = \frac{c_{k+1}}{10^{(k+1)!}} + \frac{c_{k+2}}{10^{(k+2)!}} + \dots > 0,$$

и так как $q = 10^{k!}$, то

$$\alpha - \frac{p}{q} = \frac{c_{k+1}}{q^{(k+1)!}} + \frac{c_{k+2}}{q^{(k+1)(k+2)}} + \dots$$

Отсюда

$$\alpha - \frac{p}{q} = 9 \left(\frac{1}{q^{k+1}} + \frac{1}{q^{(k+1)(k+2)}} + \dots \right) < \frac{9}{(q-1)q^k}. \quad (9)$$

Чтобы доказать трансцендентность числа α , предположим противное — что оно алгебраическое; тогда α удовлетворяет уравнению (1), коэффициенты которого — целые числа. Обозначим через d кратчайшее расстояние от корня α до других действительных корней уравнения.

Положив $A = |\alpha| + d$, вычислим по формуле (5) число M и выберем натуральное число k таким большим, чтобы одновременно выполнялись следующие три неравенства:

$$k > n, \quad \frac{9}{(q-1)q^k} < d, \quad \frac{9}{(q-1)q^{k-n}} < \frac{1}{M}. \quad (10)$$

В силу неравенства (9) и среднего из условий (10), $\frac{p}{q}$ отстоит от α меньше чем на d , и потому $\frac{p}{q}$ не является корнем уравнения (1). Так как

$$\left| \frac{p}{q} \right| = \left| \alpha - \left(\alpha - \frac{p}{q} \right) \right| \leq |\alpha| + \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < |\alpha| + d = A,$$

то выполняются условия теоремы 1, и следовательно,

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{Mq^n}. \quad (11)$$

С другой стороны, из неравенства (9) и последнего из условий (10)

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{Mq^n}. \quad (12)$$

Таким образом, предположение, что α – алгебраическое число, привело к противоречивым неравенствам (11) и (12). Следовательно, α – трансцендентное число.

Итак, теорема 2 позволяет нам строить трансцендентные числа. Именно, трансцендентное число можно получить из всякой бесконечной дроби, у которой не все цифры, начиная с некоторой, нули, по следующему способу: нужно k -ю цифру после запятой поставить на место с номером $k!$, а остальные места заполнить нулями. Например, из числа 0,314159... получается такое трансцендентное число:

0,3100040...	010...	050...
↓	↓	↓
6-е	24-е	120-е
место	место	место

Заключение

С одной стороны, действительные трансцендентные числа составляют часть всех действительных чисел. Но приведенный в конце предыдущего пункта пример показывает, что в некотором смысле трансцендентных чисел «столько же», сколько и действительных, – именно в том смысле, что из каждого действительного числа (кроме конечных десятичных чисел) можно образовать трансцендентное.

Однако в некотором другом смысле почти все действительные числа – трансцендентные, алгебраические же составляют лишь ничтожную часть действительных чисел!

В 1878 году немецкий математик Г. Кантор (1845–1918) доказал, что алгебраические числа можно занумеровать так, что каждое алгебраическое число получит свой номер, и под каждым номером будет алгебраическое число (см. Приложение). Возьмем отрезок сколь угодно малой длины, например длины $\varepsilon = 10^{-15}$ см (напомним, что радиус электрона равен приблизительно 10^{-12} см). Изобразив действительные числа точками числовой прямой, покроем алгебраическую точку №1 отрезком длины $\frac{1}{2}\varepsilon$, алгебраическую точку №2 – отрезком длины $\frac{1}{2^2}\varepsilon$, алгебраическую точку № n – отрезком длины $\frac{1}{2^n}\varepsilon$ и так далее. Сумма длин покрывающих отрезков равна ε , хотя они частично и накладываются друг на друга и покрывают не только все алгебраические числа, но и часть трансцендентных. Вся числовая ось бесконечна, а сумма длин отрезков, покрывающих алгебраические точки, составляет всего тысячную долю радиуса электрона! Это наглядно показывает, что почти все числа – трансцендентные, алгебраические же числа являются редкими исключениями.

Приложение

Назовем *рангом уравнения* (1) число r :

$$r = n + |a_0| + |a_1| + \dots + |a_n|; \quad (13)$$

здесь $n \geq 1$, $|a_0| \geq 1$, следовательно, $r \geq 2$.

Для каждого натурального $r \geq 2$ неопределенное уравнение (13) имеет конечное число решений в целых неотрицательных числах. Следовательно, существует конечное число уравнений каждого ранга. Например, ранга 2 – два уравнения: $\pm x = 0$; ранга 3 – шесть уравнений:

$$\pm x^2 = 0, \pm x \pm 1 = 0;$$

ранга 4 – уравнения

$$\pm x^3 = 0, \pm x^2 \pm x = 0, \pm x^2 \pm 1 = 0, \pm x \pm 2 = 0, \pm 2x \pm 1 = 0.$$

Найдем корни этих уравнений и выпишем их друг за другом: сначала корни уравнений ранга 2, затем – корни уравнений ранга 3 и так далее; корни уравнений одного ранга выписываем в произвольном порядке, причем если число является корнем нескольких уравнений, то выписываем его только один раз. Получим последовательность чисел:

$$0, 1, -1, i, -i, 2, -2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2},$$

далее – корни уравнений ранга 5 и т.д.

Каждое алгебраическое число, таким образом, будет выписано и получит свой порядковый номер в последовательности. Если интересуются только действительными алгебраическими числами, то комплексные опускают.

Упражнения

1. Докажите, что число

$$\alpha = c_0 + \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2^{2!}} + \dots + \frac{c_k}{2^{k!}} + \dots,$$

где c_0 – целое, а c_1, c_2, \dots принимают одно из значений 0 или 1, – трансцендентно.

2. Докажите, что теорема 2 справедлива и в том случае, если числа $\{c_k\}$ принимают любые целые значения, ограниченные в совокупности, т.е. если существует такая константа B , что $\{c_k\} < B$ для всех значений индекса k .

3. Докажите, что в теореме 2 можно положить

$$\alpha = c_0 + \frac{c_1}{10^{n_1}} + \frac{c_2}{10^{n_2}} + \dots,$$

где $\{n_k\}$ – любая последовательность натуральных чисел, подчиненная условию

$$n_{k+1} \geq \lambda_k n_k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

а $\{\lambda_k\}$ – произвольная бесконечно возрастающая последовательность действительных чисел, например, $\lambda_k = \lg k$.

В следующих упражнениях под *целым комплексным числом* мы понимаем число вида $a + bi$, под *рациональным комплексным* – число $(a + bi)/q$, где a, b – целые, q – натуральное число, а i – такое, что $i^2 = -1$.

4. Докажите, что если число α удовлетворяет уравнению (1) с целыми комплексными коэффициентами, то оно алгебраическое.

5. Докажите, что теорема 1 справедлива, если в ее условиях α – комплексное иррациональное, а p/q – комплексное рациональное число.

6. Докажите, что теорема 2 и утверждения упражнений 1, 2, 3 справедливы и тогда, когда коэффициенты $\{c_k\}$ принимают целые комплексные значения.

Приложение к журналу «Квант» №6/2000

ЧИСЛА И МНОГОЧЛЕНЫ

Составитель *А.А.Егоров*

Редактор *А.Ю.Котова*

Литературный редактор *Л.В.Кардасевич*

Технический редактор *Е.В.Морозова*

Компьютерная группа

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

ИБ № 46

Формат 84×108 1/32. Бум. офс. нейтр. Гарнитура кудряшевская.

Печать офсетная. Усл. печ. л. 6,72.

Заказ 2 630

117296 Москва, Ленинский пр., 64-А,

«Квант»

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени

ГУП Чеховский полиграфический комбинат

Министерства Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и
средств массовых коммуникаций

142300, г.Чехов Московской области

Тел. (272) 71-336. Факс (272) 62-536

Индекс 70465